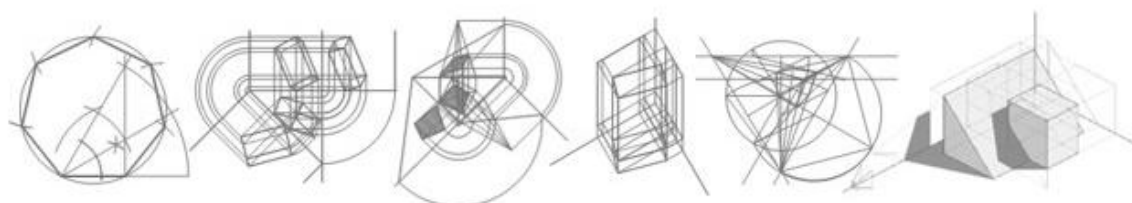




Antonio Cauli

DISEGNO

Teoria e Rappresentazione



COSTRUZIONI GEOMETRICHE
PROIEZIONI ORTOGONALI
ASSONOMETRIA
PROSPETTIVA
TEORIA DELLE OMBRE
APPROFONDIMENTI

SPECIMEN

COSTRUZIONI GEOMETRICHE

Concetti generali

Introduzione

Il disegno esprime spesso attraverso l'articolazione di figure geometriche elementari, forme grafiche composte da procedimenti formali variabilmente complessi. Le finalità specificamente pratiche di tali elaborazioni, legate ai vari ambiti applicativi del disegno tecnico, dall'urbanistica all'architettura, dalla meccanica al design, determinano la realizzazione di elaborati grafici caratterizzati da estrema precisione e unicità delle immagini prodotte. È importante in questo senso il raccordo costante con i contenuti disciplinari della geometria in modo che sia sempre chiaro il rapporto fra la realizzazione pratica e i principi geometrico-matematici che sottendono a tali procedimenti esecutivi, anche se, è bene precisare, gli esempi proposti saranno risolti per via esclusivamente grafica. Tali procedimenti riguarderanno le varie primitive grafiche (rette, curve, angoli, poligoni) e le loro relazioni (parallelismo, ortogonalità, tangenza, raccordi, divisioni in parti). L'esecuzione di tali procedure grafiche dovrà necessariamente fare i conti con l'approssimazione grafica derivante dall'utilizzo di strumenti tecnici per loro stessa natura imperfetti (matite, riga, squadre e compasso). Al fine ottenere i risultati migliori è consigliabile affilare costantemente le mine delle matite o dei portamine, e utilizzare gomme morbide bianche poiché non lasciano segni sul foglio di carta. Le squadre, di plastica dura, devono avere oltre ad un lato millimetrato gli altri due scanalati per facilitare l'inchiostatura. Il compasso da utilizzare in posizione verticale e con la mina a "scalpello" dovrà essere non usurato e di ottima qualità. Al fine di non lasciare dubbi circa la definizione dei vari enti geometrici, si ritiene utile precisare alcune fondamentali e ricorrenti definizioni.

Punto

Il Punto è il primo degli elementi fondamentali della geometria euclidea, e viene definito da una lettera maiuscola in genere nell'ordine alfabetico di presentazione all'interno della costruzione. Il punto si considera un elemento grafico non misurabile, non divisibile, privo di dimensione, anche se nella pratica del disegno dovrà necessariamente essere visualizzato.

Retta

L'insieme di infiniti punti allineati è definito Retta, caratterizzata da assenza di spessore, lunghezza infinita e direzione nello spazio. Si indicano con lettere minuscole. Due rette che intersecandosi formano quattro angoli uguali (retti) si definiscono

perpendicolari, oppure oblique se formano angoli differenti. Un punto di una retta la divide in due parti, anch'esse entrambi illimitate al pari della retta, chiamate Semirette. La porzione di retta compresa fra due punti, detti estremi, ad essa appartenenti si chiama Segmento. Si definiscono consecutivi due segmenti aventi un punto in comune, e se appartenenti alla stessa retta, adiacenti. Gli estremi denominati da due lettere maiuscole individuano il segmento.

Piano

Il Piano è una superficie illimitata priva di spessore. Può essere individuato da tre punti non allineati, da una retta e un punto non appartenente ad essa, oppure da due rette incidenti. Due piani sono paralleli se la distanza, presa perpendicolarmente fra loro si mantiene costante. Due piani che intersecandosi formano angoli retti, si definiscono perpendicolari (ortogonali o normali). Il piano si indica con lettere minuscole dell'alfabeto greco (es. α , β , γ). Una retta, (origine), giacente su un piano, lo divide in due semipiani.

Angoli

L'angolo è la porzione di piano individuato da due semirette aventi origine in un punto detto vertice. Si intende per angolo concavo la regione di piano contenente il prolungamento dei lati, mentre l'altra definisce l'angolo convesso. Si definisce angolo piatto (180°), quello i cui lati si trovano sulla stessa retta. È detto angolo retto (90°) l'angolo formato da due lati fra loro perpendicolari. L'angolo minore dell'angolo retto è detto acuto, mentre quello maggiore è detto ottuso.

Si definiscono consecutivi gli angoli che hanno il vertice e un lato in comune, o adiacenti se hanno un lato e il vertice in comune e gli altri lati allineati sulla stessa retta. Si definiscono supplementari angoli la cui somma è pari ad un angolo piatto (180°) e complementari angoli la cui somma è pari ad un angolo retto (90°).

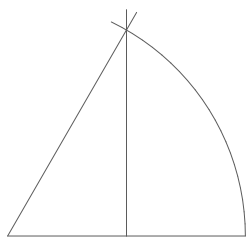
Opposti al vertice hanno vertice in comune e lati appartenenti alle stesse rette. La bisettrice è una semiretta con origine nel vertice che divide l'angolo in due parti uguali.

Curve

Le curve policentriche sono costituite da archi di circonferenza aventi centri diversi raccordati. I Raccordi uniscono rette e curve senza dar luogo a discontinuità. Fra le più significative citiamo: Ovali (Curva chiusa simmetrica rispetto a due assi ortogonali costituita da quattro archi raccordati), Ovoli (Curva chiusa simmetrica rispetto ad un asse costituita dal raccordo di una semicirconferenza e tre archi) e Spirali policentriche (curva aperta formata da archi di circonferenza di raggi crescenti raccordati).

Non tutte le curve possono essere costruite attraverso l'utilizzo di archi di circonferenza. Fra queste citiamo le Coniche (Ellisse, Parabola, Iperbole) date dall'intersezione di un piano secante con una (...)

Costruzioni Geometriche | Poligoni regolari dato il lato

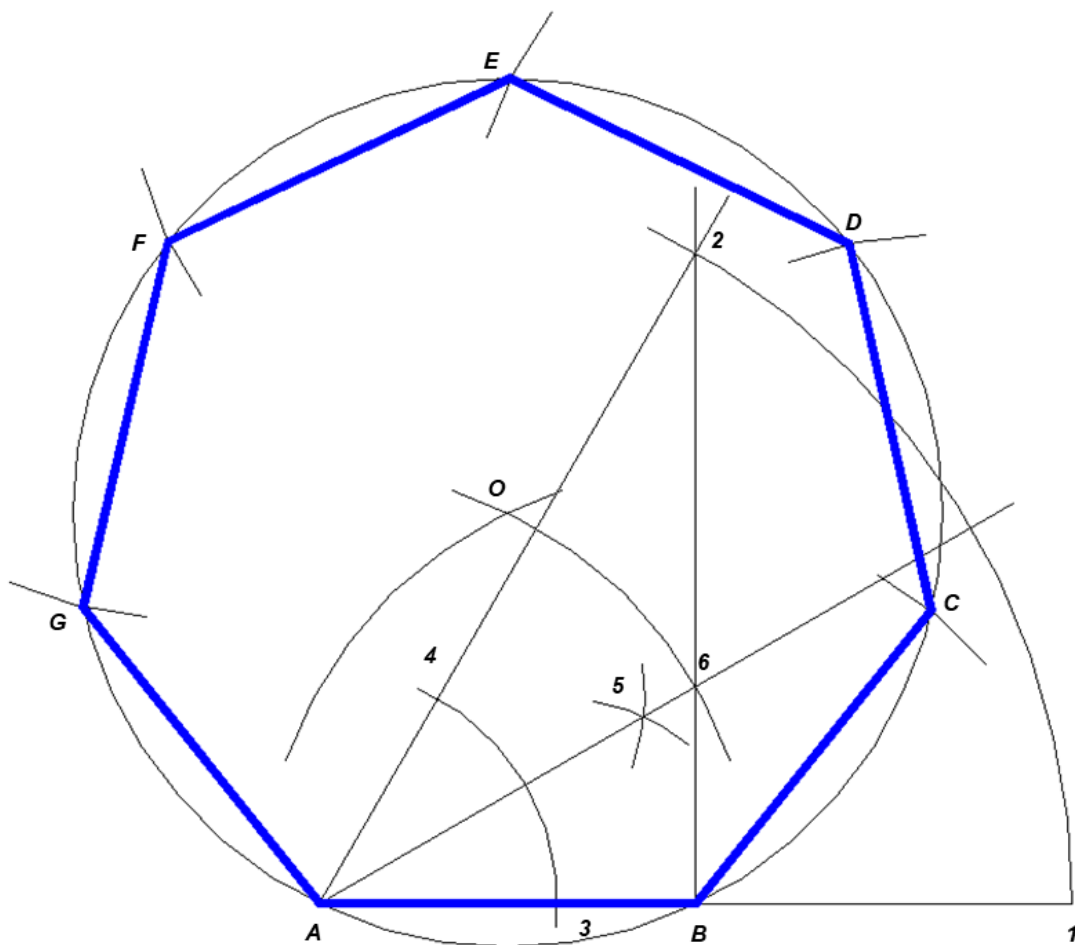
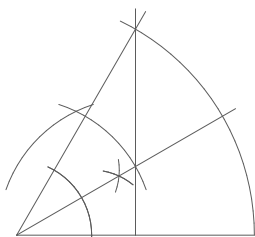


Ettagono

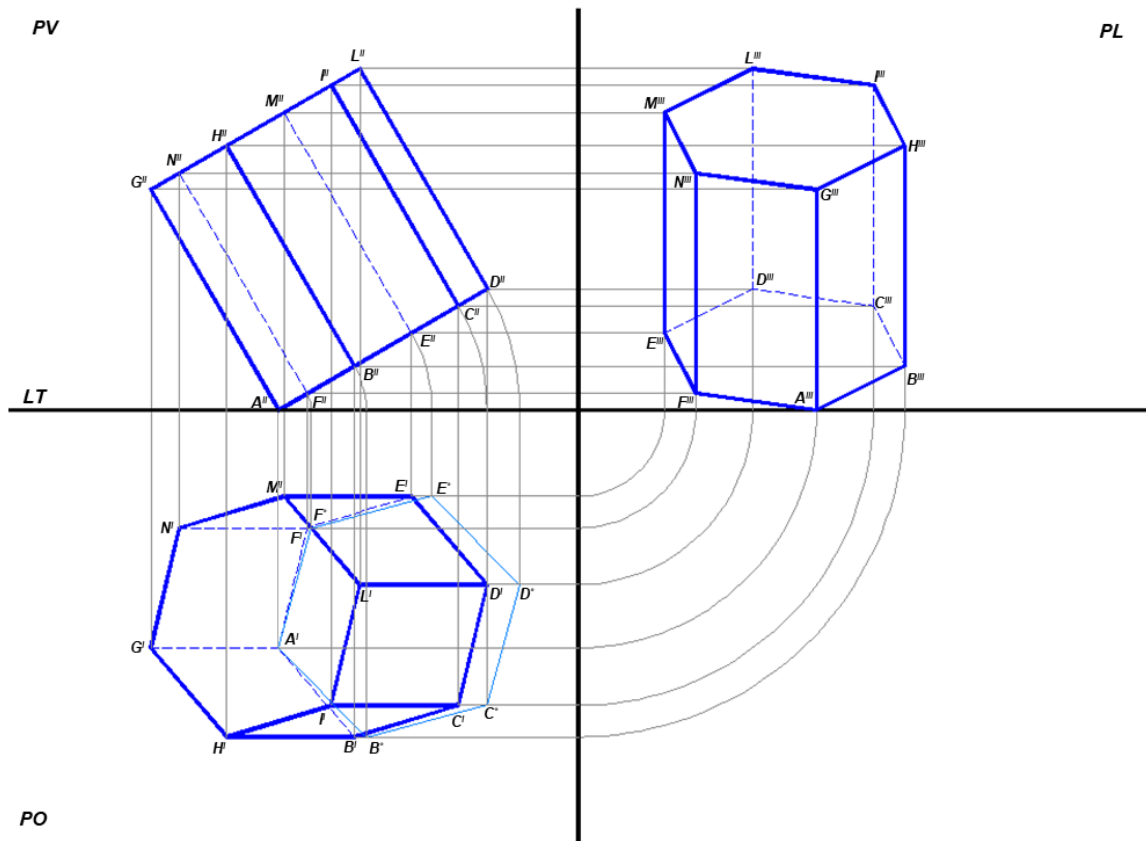
Tracciare il lato AB e sulla stessa retta B1 di uguale lunghezza. Determinare 2 come intersezione fra la perpendicolare per B e l'arco di apertura A1 ottenuto puntando in A.

Dopo aver tracciato A2 costruisci la bisettrice dell'angolo 1A2, che interseca in 6 la perpendicolare innalzata per B. Con apertura A6 centra in A e B e determina O.

Con apertura OA centrare in O tracciare il cerchio che circoscrive l'ettagono. Riportare di seguito sulla circonferenza i punti alla distanza AB. Unire i punti A B C D E F e G.



Proiezioni ortogonali | Solidi



Proiezione ortogonale di un prisma a base esagonale inclinata di 30° rispetto al Piano Orizzontale

1 – Impostazione

Tracciare la linea di terra LT. Tracciare la retta verticale ortogonale a LT e individuare i piani principali di proiezione PO, PV e PL.

2 – La base inferiore sul PO

Tracciare sul PO l'esagono di base $A^1 B^1 C^1 D^1 E^1 F^1$ di misure oggettive. Proiettare i punti ortogonalmente alla LT. Tracciare nell'intersezione sulla LT del raggio proiettante passante per A una retta inclinata di 30°. Riportare col compasso puntando su A^1 gli archi fino all'intersezione con la retta inclinata individuando: $F^2 - B^2 - E^2 - C^2 - D^2$. Determinare la prima proiezione nell'intersezione fra il raggio proiettante della proiezione sul PV e il raggio ortogonale alla cerniera passante per la base ribaltata: $B^1 - C^1 - D^1 - E^1 - F^1$

3 – La proiezione sul PV

Tracciare sul PV, la retta d'appartenenza della base superiore alla distanza, dalla base inferiore, pari all'altezza del prisma. Tracciare sul PV le proiezioni degli spigoli laterali: A-G D-L F-N B-H E-M C-I. Ripassare a vista, gli spigoli esterni della figura: A-D-L-G Ripassare gli spigoli interni a vista, della figura: B-H e C-I. Ripassare gli spigoli interni nascosti della figura: F-N e E-M

4 – La base superiore sul PO

Determinare la prima proiezione nell'intersezione fra il raggio proiettante della proiezione sul PV e il raggio ortogonale alla cerniera (linea verde) passante per la base inferiore sul PO: $H^1 - I^1 - L^1 - M^1 - N^1 - G^1$. Unire gli spigoli.

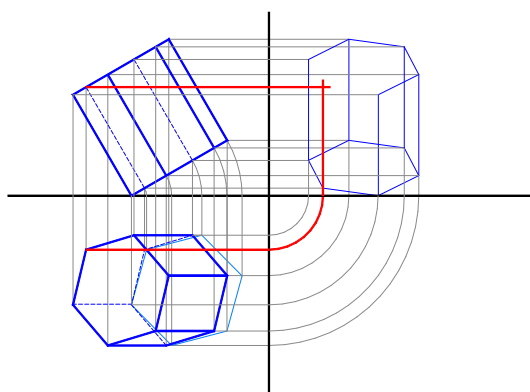
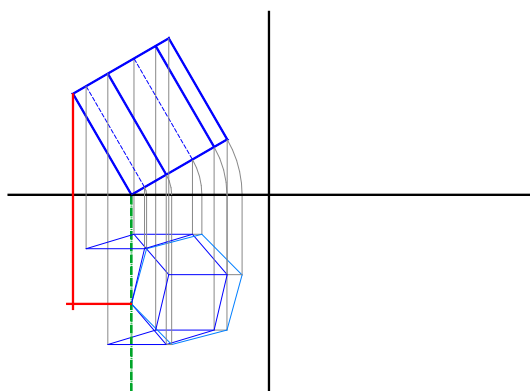
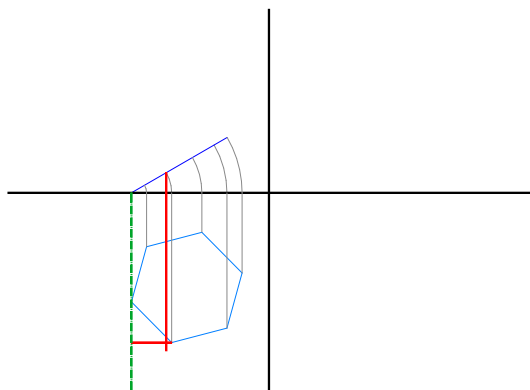
5 – Completamento della proiezione sul PO

Ripassare il contorno esterno della figura. Ripassare le parti a vista interne della figura. Ripassare le parti nascoste all'interno della figura.

6 – Proiezione sul PL e completamento

Determinare l'intersezione fra i raggi proiettanti provenienti dal PO e dal PV: A B C D E F G H I L M N

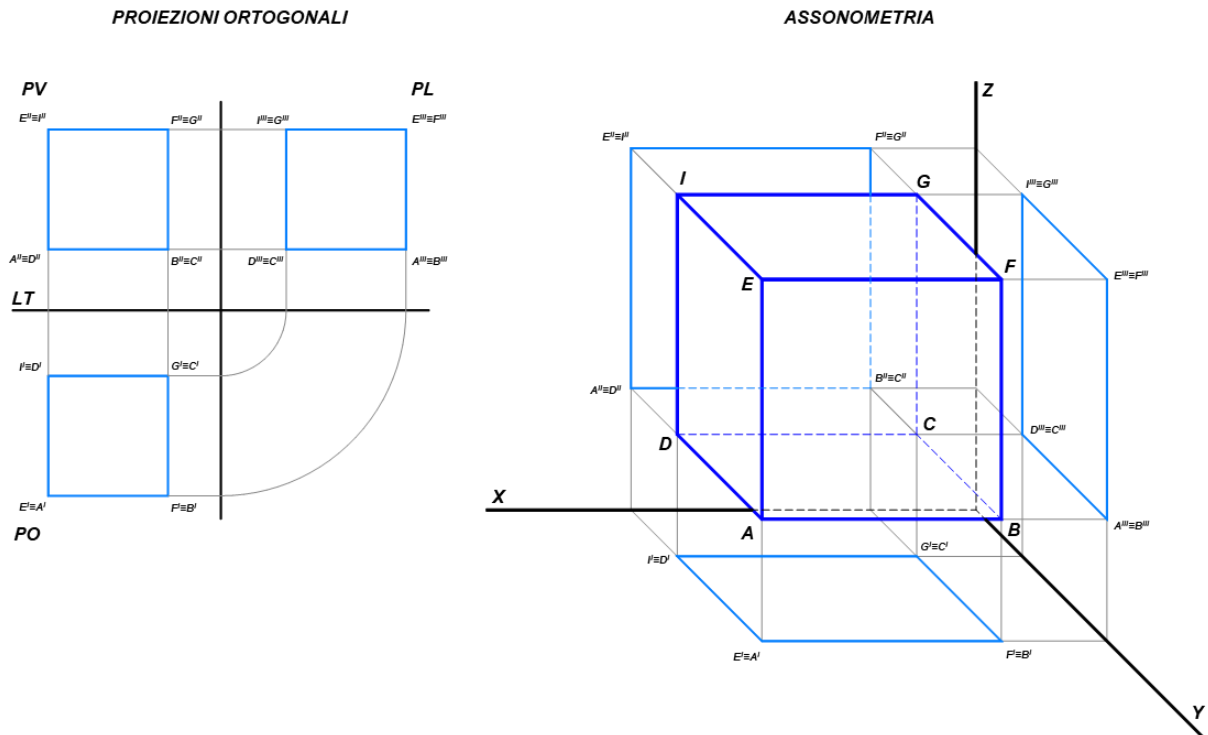
Ripassare il contorno esterno della figura, le parti a vista interne della figura e le parti nascoste all'interno della figura.



Il prisma a base esagonale inclinata di 30° rispetto al **piano orizzontale**, mantiene la condizione di parallelismo degli spigoli laterali rispetto al piano verticale. Un vertice della base inferiore coincide con il piano orizzontale. Date la posizione del solido e le condizioni proiettive gli spigoli laterali si proietteranno con le dimensioni oggettive solamente sul piano verticale mentre le basi esagonali si presenteranno scorciate sui piani orizzontale e laterale. Dopo avere rappresentato oggettivamente l'esagono sul piano orizzontale, procederemo alla impostazione di una cerniera ortogonale al piano verticale passante per il vertice coincidente con il piano orizzontale e successivamente tratteremo, inclinandola di 30° la retta d'appartenenza della proiezione della base sul piano verticale. Tenendo conto che i punti ruotano mantenendo la stessa distanza dalla cerniera si determinerà la seconda proiezione della base inferiore riportando sulla retta inclinata le intersezioni dei raggi proiettanti sulla linea di terra. Determinare in seguito la prima proiezione della base nell'intersezione fra i raggi proiettanti passanti per il piano verticale e i raggi ortogonali passanti per l'esagono oggettivo e ortogonali alla cerniera.

Gli spigoli laterali manterranno, nella **seconda proiezione**, la condizione di ortogonalità rispetto alla base. Potranno quindi date le direzioni ortogonali alla retta inclinata di 30° essere rappresentate in misura oggettiva. Le due basi del prisma manterranno fra loro la condizione di parallelismo e l'ortogonalità rispetto al piano verticale.

La **proiezione sul piano laterale** non presenta elementi di novità rispetto agli esercizi precedenti. È comunque bene ricordare che per la determinazione delle parti nascoste si deve tenere conto della direzione dei raggi proiettanti ortogonali al piano laterale.



Assonometria Cavaliera di un cubo

1 – Proiezione ortogonale

Realizzare la proiezione ortogonale del cubo posto in posizione frontale rispetto ai piani principali.

2 – Impostazione degli assi

Tracciare con direttrice orizzontale l'asse X. Tracciare ortogonalmente a X l'asse Z. Tracciare l'asse Y inclinato di 135° rispetto a X e Z.

3 – Proiezioni sui piani assonometrici

Proiettare sul piano XY i raggi con direzione: Y, X. Individuare la proiezione sul piano XY: $E^I \equiv A^I - F^I \equiv B^I - G^I \equiv C^I - I^I \equiv D^I$.

Proiettare sul piano XZ i raggi con direzione: Z, X. Individuare la proiezione sul piano XZ: $A^{II} \equiv D^{II} - B^{II} \equiv C^{II} - F^{II} \equiv G^{II} - E^{II} \equiv I^{II}$.

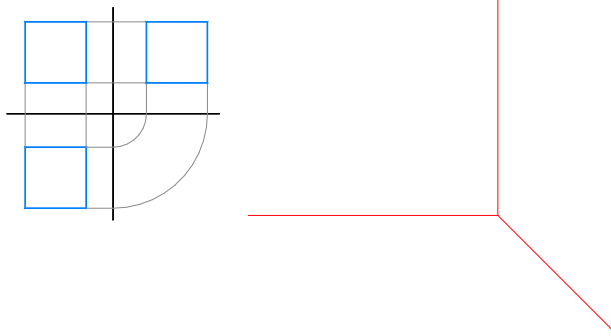
Proiettare sul piano YZ i raggi con direzione: Z, Y. Individuare la proiezione sul piano YZ: $A^{III} \equiv B^{III} - E^{III} \equiv F^{III} - I^{III} \equiv G^{III} - D^{III} \equiv C^{III}$.

4 – Proiezioni dei punti dell'assonometria

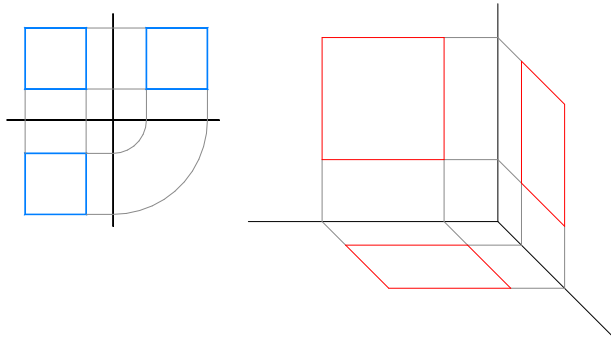
Proiettare dai piani assonometrici, con direzioni X,Y e Z i punti: A – B – C – D – E – F – G – I.

5 – Completamento grafico

Ripassare il contorno dell'assonometria. Ripassare le parti a vista interne dell'assonometria. Ripassare le parti nascoste dell'assonometria. Ripassare le parti a vista della proiezione sul piano XY. Ripassare le parti a vista della proiezione sul piano XZ. Ripassare le parti nascoste della proiezione sul piano XZ. Ripassare le parti a vista della proiezione sul piano YZ. Ripassare le parti a vista degli assi. Ripassare le parti nascoste degli assi.



Nell'assonometria cavaliere si ipotizza la posizione dell'osservatore a distanza infinita, raggi proiettanti di conseguenza paralleli e inclinati rispetto al quadro assonometrico. In funzione dell'inclinazione dei raggi, gli assi XZ sono ortogonali fra loro mentre gli assi XY e YZ formano fra loro angoli uguali di 135° . La peculiarità più significativa dell'assonometria cavaliere è la possibilità di poter rappresentare sul piano XZ figure piane in vera forma e grandezza se poste in condizione di parallelismo. Ritroviamo la situazione proiettiva dell'esercizio in oggetto. Il cubo infatti, staccato dai tre piani di proiezione, presenta le facce parallele rispetto ad essi. Dal punto di vista pratico la proiezione ortogonale sul piano verticale coinciderà con la proiezione sul piano XZ dell'assonometria. Si consiglia, infatti di rappresentare, anche nei metodi assonometrici diretti, la proiezione ortogonale, al fine di chiarire con più evidenza il rapporto fra la forma del solido e la sua posizione rispetto ai piani. Il confronto fra due, o più metodi proiettivi utilizzati per la rappresentazione dello stesso oggetto, rappresenta un valido approccio per evidenziare le specifiche peculiarità dei sistemi di rappresentazione grafica. Questo procedimento in particolare, potrebbe essere semplificato dimezzando le misure del solido.



Dopo avere impostato le direzioni degli assi e conseguentemente dei rispettivi raggi proiettanti, X, Y e Z, si procede rappresentando le tre proiezioni sui piani XY, XZ e YZ. Si conferma la proiezione sul piano XZ in vera forma e grandezza del solido.

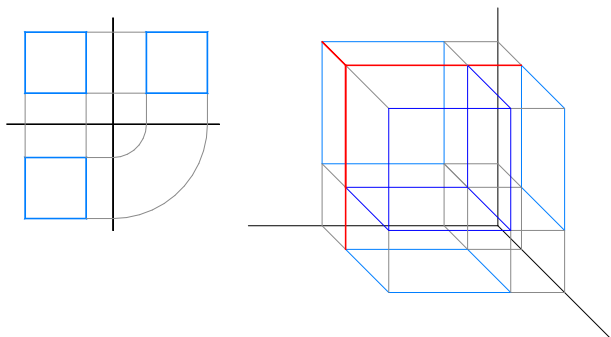
L'immagine assonometrica sarà data dall'intersezione dei raggi proiettanti:

X passante per i punti della proiezione sul piano YZ

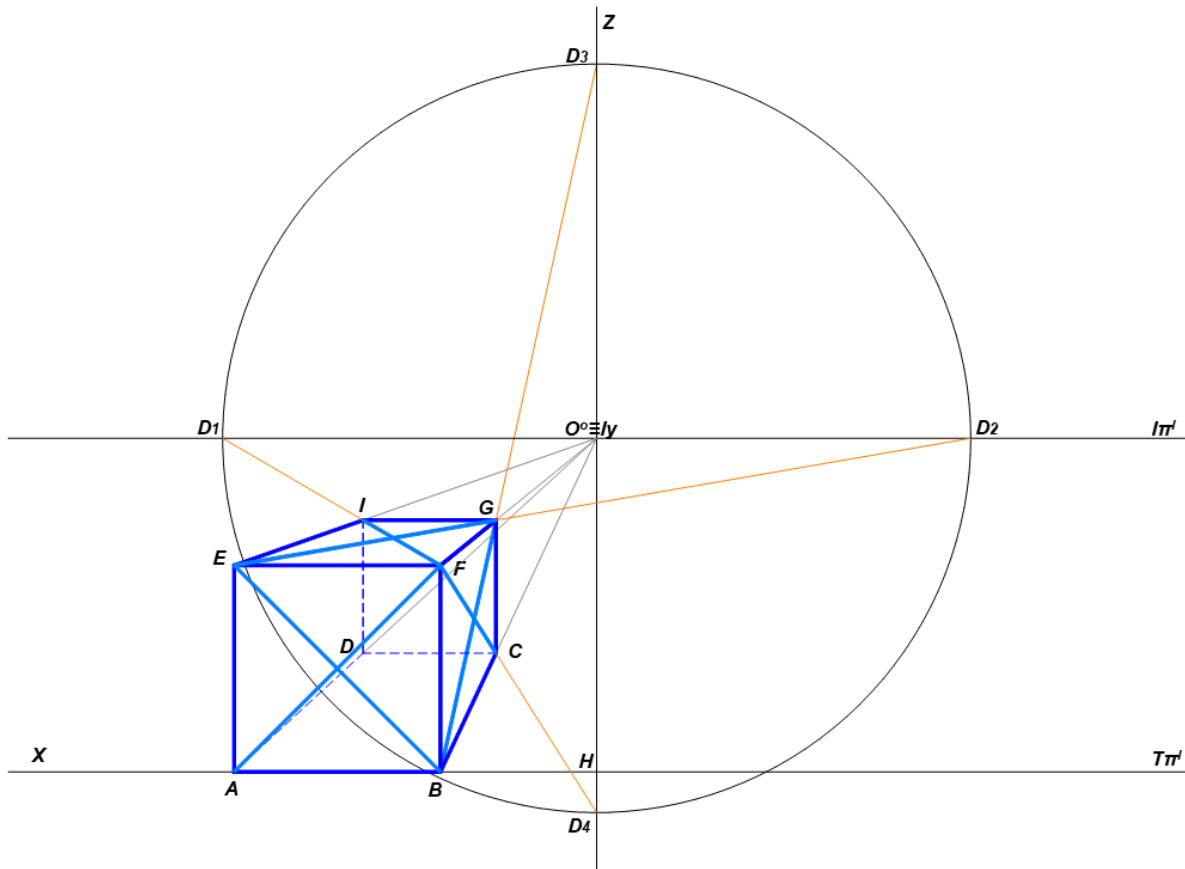
Y passante per i punti della proiezione sul piano XZ

Z passante per i punti della proiezione sul piano XY.

Ad esempio il raggio proiettante Z passante per A^I , il raggio proiettante Y passante per A^{II} , il raggio proiettante X passante per A^{III} , si incontrano nel punto A dell'assonometria. Seguendo lo stesso procedimento per tutti i punti si ottiene la rappresentazione assonometrica del cubo. Per completare la proiezione sarà necessario individuare e rappresentare con linea continua di spessore adeguato, oltre al contorno esterno, le parti a vista della figura. Le parti non direttamente toccate dai raggi proiettanti, ovvero nascoste, saranno rappresentate con linea tratteggiata di spessore pari a $\frac{1}{2}$ delle parti a vista.



Prospettiva | Quadro Frontale | Metodo dei punti di distanza



Prospettiva a Quadro Frontale di un cubo

1 – Impostazione della prospettiva

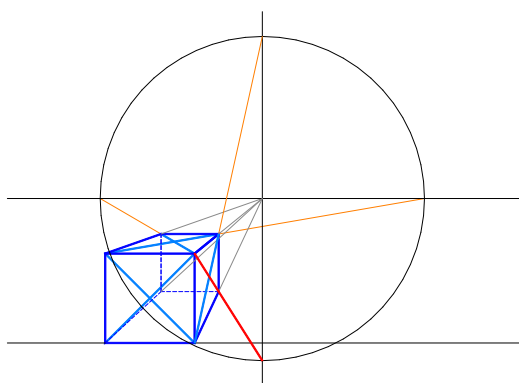
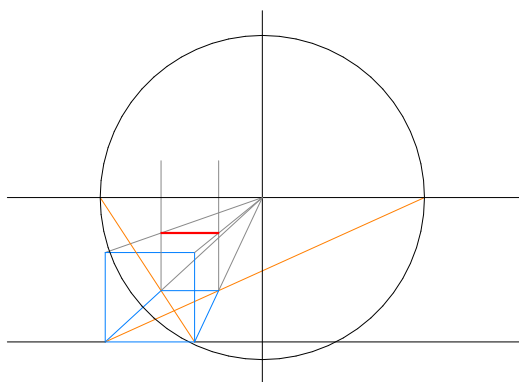
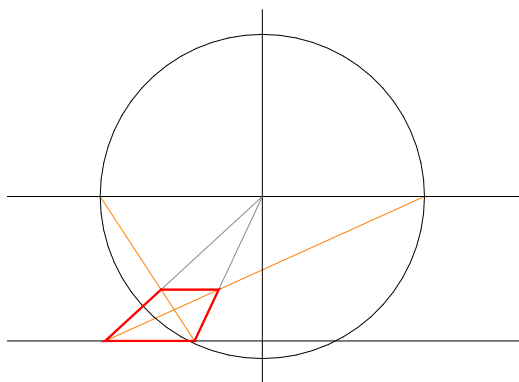
Tracciare la $l\pi'$ (Linea d'orizzonte). Tracciare la $T\pi'$ (Linea delle tracce) parallela alla $l\pi'$. Tracciare il piano meridiano principale individuando H su $T\pi'$ e O° su $l\pi'$. Tracciare la circonferenza di centro O° e individuare $D1$ e $D2$ su $l\pi'$ e $D3$ e $D4$ sul piano meridiano principale. O° coincidente con $l\gamma$; X coincidente con $T\pi'$; Z coincidente con il piano meridiano principale.

2 – Proiezione della base

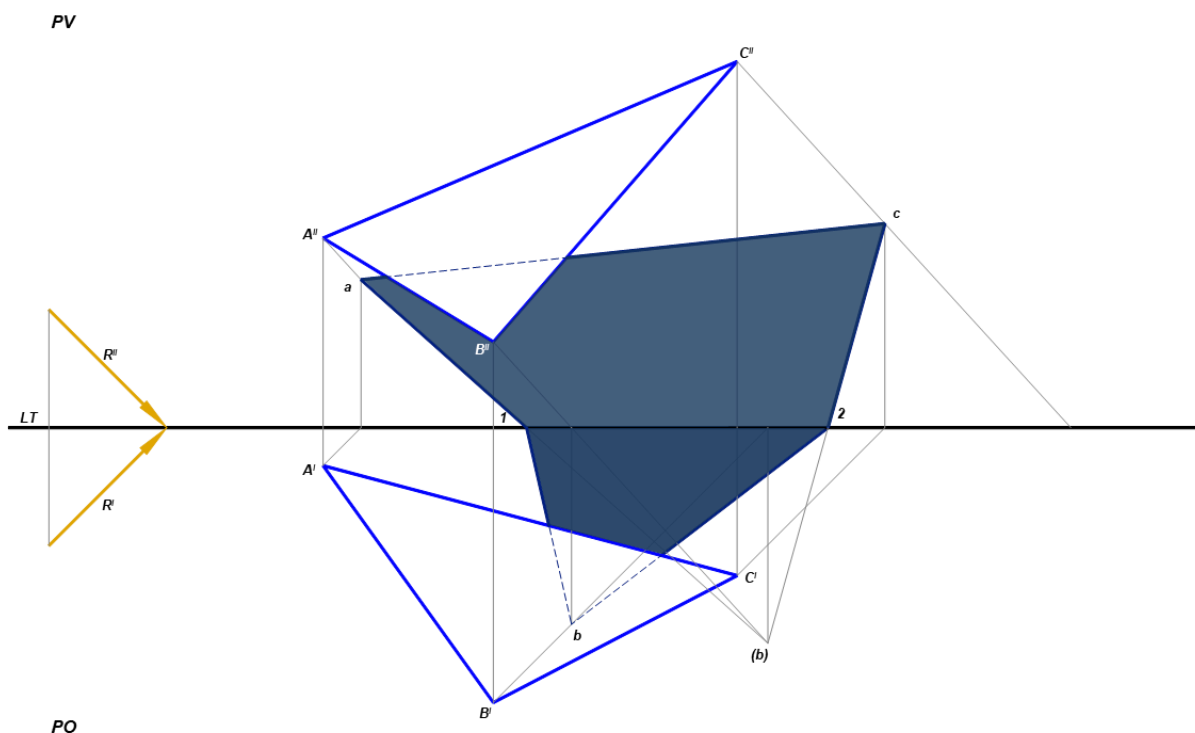
Individuare sulla linea delle tracce AB, misura oggettiva del lato del cubo. Tracciare il raggio Y passante per A. Tracciare il raggio Y passante per B. Tracciare il raggio $D2$ passante per A ($AB = BC$). Tracciare il raggio $D1$ passante per B. Tracciare la direzione X unendo D e C. Evidenziare AD. Evidenziare BC.

3 – Impostazione del solido

Tracciare il raggio Z a partire da: A, B, C e D. Individuare gli spigoli del cubo: AE, EF ed FB. Tracciare Y passante per E, Y passante per F, e determinare IG sulle Z passanti per D e C. Individuare e rappresentare le parti a vista e nascoste del cubo.



La prospettiva a quadro frontale realizzata con il metodo dei punti di misura permette di rappresentare in modo diretto, ovvero senza l'ausilio delle proiezioni ortogonali, gli oggetti in cui due fra le tre direzioni, la X e la Z, della terna triortogonale XYZ, si trovano in condizione di parallelismo rispetto al quadro. In particolare le direzioni X e Z manterranno anche nella rappresentazione prospettica la condizione di parallelismo, mentre per quanto riguarda la misura essa risulterà inferiore dietro il quadro, maggiore davanti al quadro e della stessa dimensione solo nella condizione di appartenenza con il quadro. La direzione Y è ortogonale rispetto al quadro. Tracciare le parallele π^l e $\iota\pi^l$ tenendo conto che la loro distanza esprime, nel rapporto della scala del disegno, l'altezza dell'osservatore, o più precisamente la distanza del centro di proiezione dal geometrale. Rappresentare verticalmente la traccia del piano meridiano principale e nell'intersezione con la $\iota\pi^l$, O^o centro del cerchio delle distanze di raggio pari alla distanza dell'osservatore dal quadro. Il cerchio interseca la $\iota\pi^l$ nei punti D1 e D2 e il piano meridiano principale nei punti D3 e D4. Poichè *"il punto di fuga di una retta è dato dall'intersezione col quadro di una retta parallela alla retta data passante per per S (Osservatore)"*, i punti D1 e D2 individuano le fughe di rette orizzontali inclinate di 45° rispetto al quadro. Analogamente la fuga delle direzioni Y si trova nell'intersezione con il quadro di una retta Y, passante per l'osservatore S. Tale punto ιy coincide con O^o . Le direzioni X e Z coincidenti con il quadro, saranno rappresentate oggettivamente in vera grandezza. Sulla base di queste considerazioni rappresentiamo oggettivamente sulla linea delle tracce un lato della base inferiore del cubo, uniamo gli estremi prima con ιy e successivamente con D1 e D2. Le intersezioni fra le rette D1 e D2 sul cerchio delle distanze e le rette con fuga in ιy ci permettono di individuare la base inferiore sul geometrale. Dopo avere tracciato le verticali passanti per la base ABCD rappresentiamo la faccia del cubo coincidente con il quadro, costruendola in vera forma e grandezza, a partire dal lato sulla $\pi\pi^l$. Unendo i punti della faccia sul quadro con la fuga delle rette Y si determinano, nelle intersezioni con le verticali i rimanenti punti del solido. Le rette d'appartenenza delle diagonali passano per i punti D1, D2, D3 e D4, che come messo in evidenza, rappresentano fughe di rette orientate di 45° rispetto al quadro.



Ombra portata di un triangolo scaleno genericamente inclinato

1 – Impostazione dei raggi di luce

Tracciare la linea di terra LT e individuare PO e PV. Impostare le proiezioni del raggio di luce: R^I sul PO; R^{II} sul PV;

2 – Proiezione su PO e PV del triangolo ABC

Proiettare in posizione generica sul Piano Orizzontale: AB – BC – CA. Proiettare ad altezza generica sul Piano Verticale: A – B – C. Unire: AB – BC – CA. Completamento della doppia proiezione.

3 – Determinazione dell'ombra del punto A

Tracciare: R^I passante per A^I . R^{II} passante per A^{II} . Dall'intersezione di R^I passante per A^I con la LT il raggio verticale fino a determinare in R^{II} passante per A^{II} , l'ombra a.

4 – Determinazione dell'ombra del punto B

Tracciare: R^I passante per B^I , R^{II} passante per B^{II} . Dall'intersezione di R^{II} passante per B^{II} con la LT il raggio verticale fino a determinare in R^I passante per B^I , l'ombra b.

5 – Determinazione dell'ombra del punto C

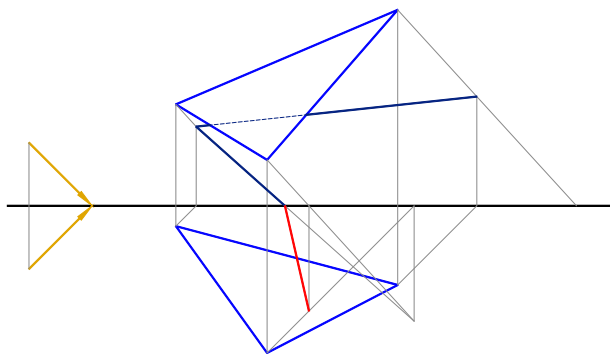
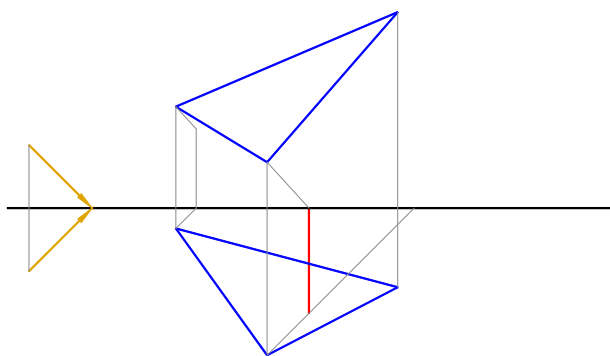
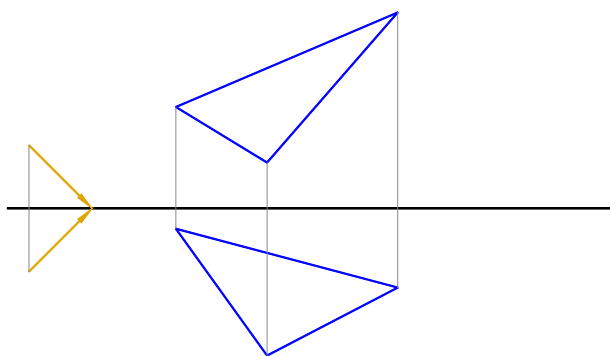
Tracciare: R^I passante per C^I . R^{II} passante per C^{II} . Dall'intersezione di R^I passante per C^I con la LT il raggio verticale fino a determinare in R^{II} passante per C^{II} , l'ombra c.

6 – Determinazione dell'ombra virtuale del punto B

Tracciare nell'intersezione di R^I passante per B^I con la LT il raggio verticale sul PO. Prolungare R^{II} passante per B^{II} fino ad intercettare nel raggio verticale (b), ombra virtuale del punto B.

7 – Ombra portata del triangolo ABC

Unire a con c sul PV e ripassare avendo cura di tratteggiare la parte coperta dal triangolo. Unire a con (b) individuando il punto 1 sulla LT. Unire 1 con b e ripassare avendo cura di tratteggiare la parte coperta dal triangolo. Unire c con (b) individuando il punto 2 sulla LT. Unire 2 con b e ripassare avendo cura di tratteggiare la parte coperta dal triangolo. Completare con la campitura dell'ombra portata su PO e PV.

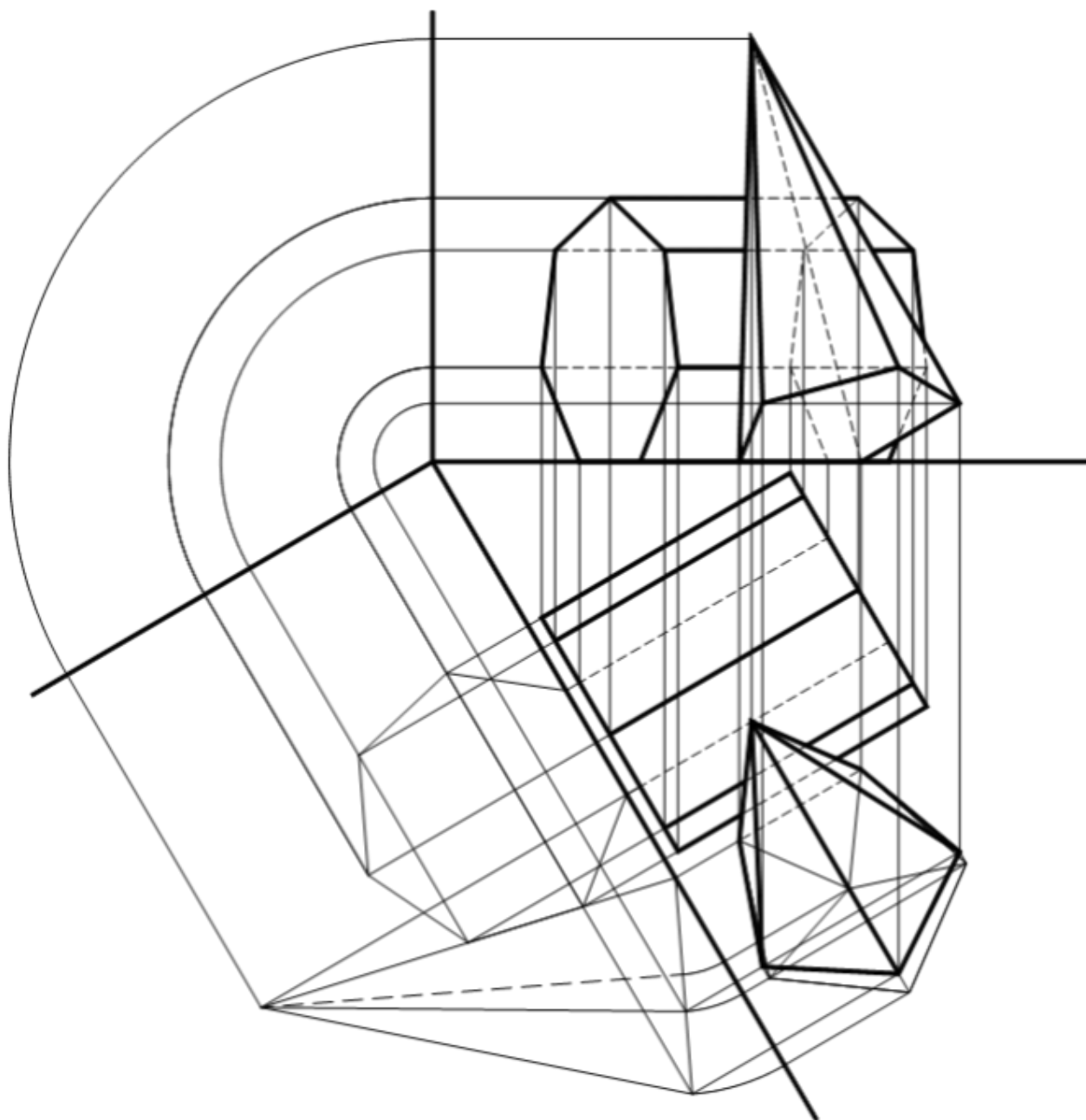


La proiezione dell'ombra portata di una figura piana, in questo caso il triangolo scaleno ABC, inclinata rispetto ai piani principali presenta alcune peculiarità che è bene mettere subito in evidenza. Poiché nessun lato del triangolo si presenta in condizione di parallelismo rispetto ai piani principali la loro ombra portata dovrà essere determinata esclusivamente attraverso la rappresentazione dell'ombra dei singoli punti e del loro successivo collegamento. Qualora l'ombra degli estremi di un lato dovessero trovarsi su piani diversi, uno sul piano orizzontale e l'altro sul piano verticale, si farà ricorso alla proiezione dell'ombra dei punti virtuali, ovvero dell'ombra proiettata sull'estensione dei piani di proiezione.

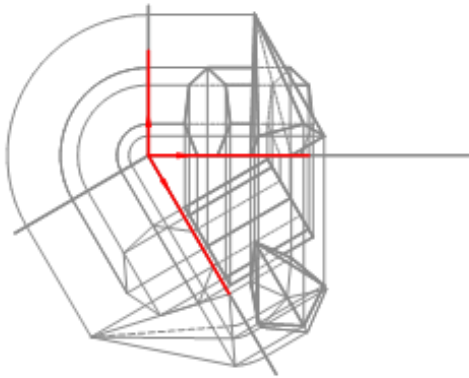
Si procede quindi dopo avere rappresentato il triangolo ABC sui piani orizzontale e verticale a definire la direzione delle proiezioni del raggio di luce R^I sul PO e R^{II} sul PV.

Sapendo che l'ombra portata dei punti si trova nell'intersezione fra le proiezioni dei raggi luminosi passanti per i rispettivi punti, si determinano le ombre portate a, b, c, dei punti A, B e C. Si rileva a questo punto che mentre le ombre di A e C si trovano sul piano verticale e quindi posso essere unite a determinare l'ombra del corrispondente lato, l'ombra dell'estremo B si trova sul piano orizzontale e non può di conseguenza essere immediatamente unito con a e b in quanto, come detto, non si trovano sullo stesso piano di proiezione. Si rende necessario a questo punto la determinazione dell'ombra portata del punto B sull'estensione del piano verticale e il collegamento di quest'ultimo con le ombre dei punti A e C sul piano verticale. La porzione di tali direzioni sul piano verticale determina l'ombra portata del triangolo sul piano verticale mentre le intersezioni sulla linea di terra unite con l'ombra reale del punto B sul piano orizzontale completa l'ombra portata sul primo piano di proiezione. A titolo esclusivamente teorico si sottolinea che si sarebbe arrivati alle stesse determinazioni se al posto dell'ombra virtuale del punto b sull'estensione del piano verticale si fosse proceduto ad analogo metodo determinando l'ombra virtuale dei punti A e C sull'estensione del piano orizzontale per poi unire tali punti con l'ombra reale di B.

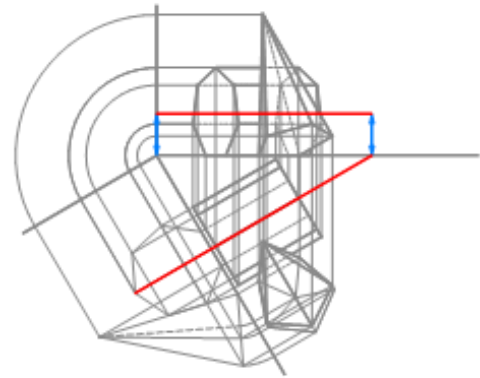
Ricordiamo di non campire le parti nascoste dell'ombra portata sovrapposte, nella rappresentazione grafica, con la proiezione del triangolo.



Prisma a base ettagonale con asse inclinato di 30° al PV e parallelo al PO. Piramide a base pentagonale inclinata di 30° rispetto al PO e con una faccia appoggiata ad una faccia del prisma.

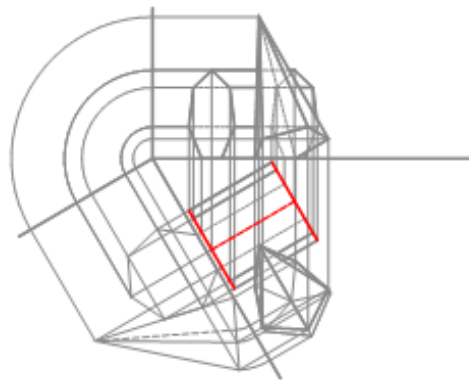


1

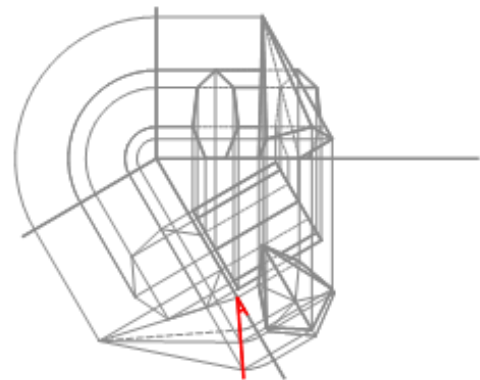


2

1) Piano Ausiliario, ortogonale all'asse del prisma inclinato di 60° rispetto al PV e ortogonale (90°) rispetto al PO. 2) Asse del prisma parallelo al PO inclinato di 30° rispetto al PV.

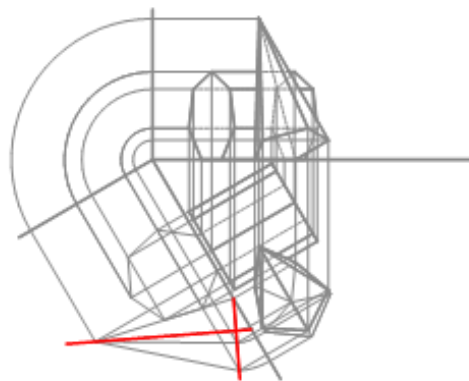


3

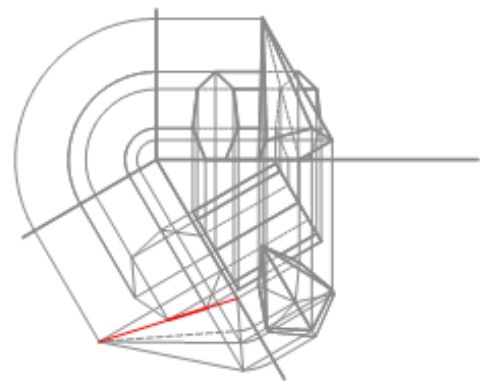


4

3) Basi del prisma ortogonali all'asse. 4) Base della piramide inclinata 30° rispetto al Piano Orizzontale.



5



6

5) Asse della piramide ortogonale alla base e inclinato 60° al PO. 6) Faccia della piramide appoggiata ad una faccia del prisma.

