Antonio Cauli

DISEGNO

Teoria e Rappresentazione

SECONDA EDIZIONE

Volume 1

Costruzioni geometriche

Proiezioni ortogonali

(Primo biennio)

Seconda edizione

Finito di stampare nel mese di Aprile 2021
presso Etabeta-ps in Arcore (MB)

A Isa, Giordano e Beatrice.

INDICE

PROIEZIONI ORTOGONALI

GLOSSARIO

SIMBOLOGIA

Punti

P^{I}	Proiezione sul Piano orizzontale
P^{II}	Proiezione sul Piano verticale
P^{III}	Proiezione sul Piano laterale
P^{*}	Ribaltamento del punto
$P^{(V)}$	Ombra portata del punto virtuale
$\in$	Appartenente
$\equiv$	Coincidente
$=$	Uguale
$\angle$	Inclinato
$/\!/$	Parallelo
$\perp$	Ortogonale
∞	Infinito

Rette

r^{I}	Proiezione della retta r sul piano orizzontale
r^{II}	Proiezione della retta r sul piano verticale
r^{III}	Proiezione della retta r sul piano laterale
$Tr1^{I}$	Traccia della retta (r) sul piano orizzontale
$Tr2^{II}$	Traccia della retta (r) sul piano verticale
$Tr3^{III}$	Traccia della retta (r) sul piano laterale

Ix	Fuga delle rette con direzione X
Iy	Fuga delle rette con direzione Y
Iz	Fuga delle rette con direzione Z
Mx	Punto di misura delle rette X
My	Punto di misura delle rette Y
Mz	Punto di misura delle rette Z

Piani

PP	Piano principale generico
PO	Piano orizzontale
PV	Piano verticale
PL	Piano laterale
LT	Linea di terra

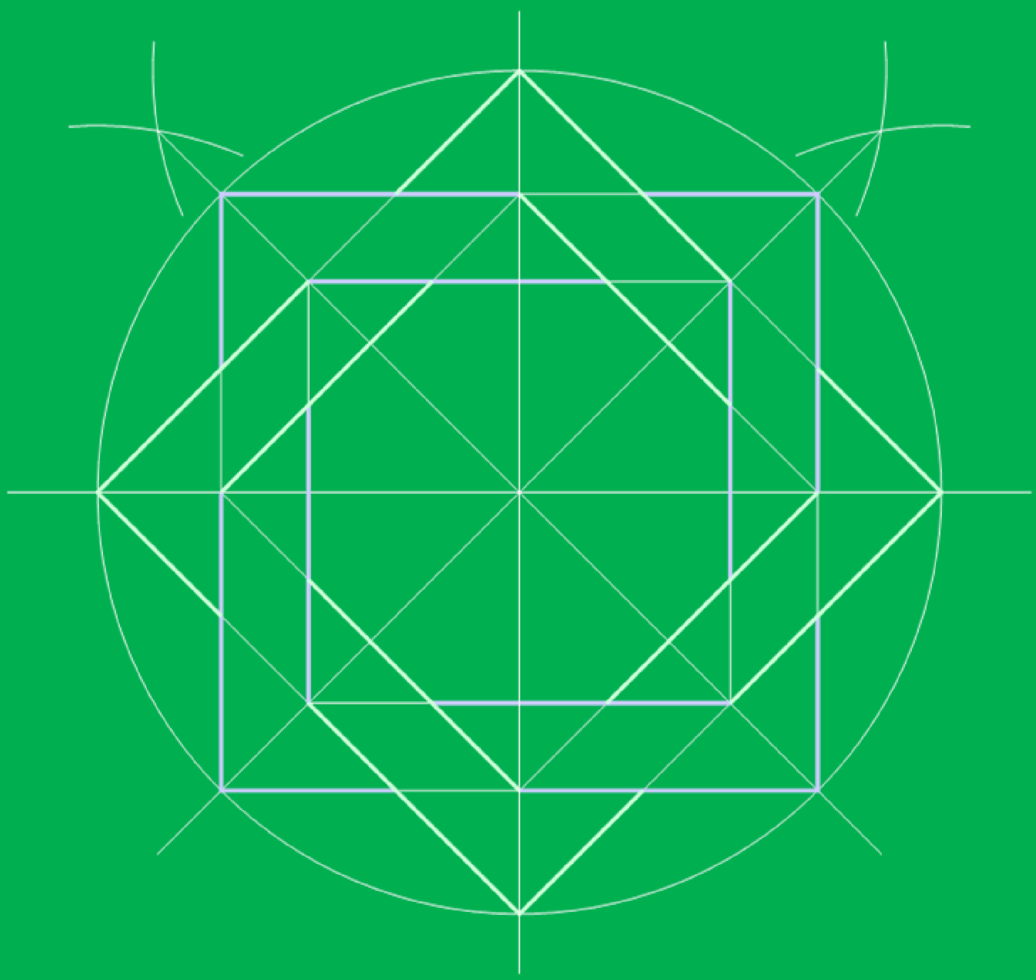
COSTRUZIONI GEOMETRICHE

Rette

Curve

Poligoni

Divisione della circonferenza



COSTRUZIONI GEOMETRICHE
Concetti generali

Introduzione

Il disegno esprime spesso attraverso l'articolazione di figure geometriche elementari, forme grafiche composte da procedimenti formali variabilmente complessi. Le finalità specificamente pratiche di tali elaborazioni, legate ai vari ambiti applicativi del disegno tecnico, dall'urbanistica all'architettura, dalla meccanica al design, determinano la realizzazione di elaborati grafici caratterizzati da estrema precisione e unicità delle immagini prodotte. È importante in questo senso il raccordo costante con i contenuti disciplinari della geometria in modo che sia sempre chiaro il rapporto fra la realizzazione pratica e i principi geometrico-matematici che sottendono a tali procedimenti esecutivi, anche se, è bene precisare, gli esempi proposti saranno risolti per via esclusivamente grafica. Tali procedimenti riguarderanno le varie primitive grafiche (rette, curve, angoli, poligoni) e le loro relazioni (parallelismo, ortogonalità, tangenza, raccordi, divisioni in parti). L'esecuzione di tali procedure grafiche dovrà necessariamente fare i conti con l'approssimazione grafica derivante dall'utilizzo di strumenti tecnici per loro stessa natura imperfetti (matite, riga, squadre e compasso). Per ottenere i risultati migliori è consigliabile affilare costantemente le mine delle matite o dei portamine, e utilizzare gomme morbide bianche poiché non lasciano segni sul foglio di carta. Le squadre, di plastica dura, devono avere oltre ad un lato millimetrato, gli altri due scanalati per facilitare l'inchiostratura. Il compasso da utilizzare in posizione verticale e con la mina a "scalpello" dovrà essere non usurato e di ottima qualità. Al fine di non lasciare dubbi circa la definizione dei vari enti geometrici, si ritiene utile precisare alcune fondamentali e ricorrenti definizioni.

Punto

Il punto è il primo degli elementi fondamentali della geometria euclidea, e viene definito da una lettera maiuscola in genere nell'ordine alfabetico di presentazione all'interno della costruzione. Il punto si considera un elemento grafico non misurabile, non divisibile, privo di dimensione, anche se nella pratica del disegno dovrà necessariamente essere visualizzato.

Retta

L'insieme di infiniti punti allineati è definito retta, caratterizzata da assenza di spessore, lunghezza infinita e direzione nello spazio. Le rette si indicano con lettere minuscole. Due rette che intersecandosi formano quattro angoli uguali (retti) si definiscono perpendicolari, oppure oblique se formano angoli differenti. Un punto di una retta la divide in due parti, anch'esse entrambi illimitate al pari della retta, chiamate semirette. La porzione di retta compresa fra due punti, detti estremi, ad essa appartenenti si chiama segmento. Si definiscono consecutivi due segmenti aventi un punto in comune, e se appartenenti alla stessa retta, adiacenti. Gli estremi denominati da due lettere maiuscole individuano il segmento.

Piano

Il piano è una superficie illimitata priva di spessore. Può essere individuato da tre punti non allineati, da una retta e un punto non appartenente ad essa, oppure da due rette incidenti. Due piani sono paralleli se la distanza, presa perpendicolarmente fra loro si mantiene costante. Due piani che intersecandosi formano angoli retti, si definiscono perpendicolari (ortogonali o normali). Il piano si indica con lettere minuscole dell'alfabeto greco (es. α, β, ϒ). Una retta, (origine), giacente su un piano, lo divide in due semipiani.

Angoli

L'angolo è la porzione di piano individuato da due semirette aventi origine in un punto detto vertice. Si intende per angolo concavo la regione di piano contenente il prolungamento dei lati, mentre l'altra definisce l'angolo convesso. Si definisce angolo piatto (180°), quello i cui lati si trovano sulla stessa retta. È detto angolo retto (90°) l'angolo formato da due lati fra loro perpendicolari. L'angolo minore dell'angolo retto è detto acuto, mentre quello maggiore è detto ottuso.
Si definiscono consecutivi gli angoli che hanno il vertice e un lato in comune, o adiacenti se hanno un lato e il vertice in comune e gli altri lati allineati sulla stessa retta. Si definiscono supplementari angoli la cui somma è pari ad un angolo piatto (180°) e complementari angoli la cui somma è pari ad un angolo retto (90°).
Gli angoli opposti al vertice hanno vertice in comune e lati appartenenti alle stesse rette. La bisettrice è una semiretta con origine nel vertice che divide l'angolo in due parti uguali.

Curve

Le curve policentriche sono costituite da archi di circonferenza aventi centri diversi raccordati. I raccordi uniscono rette e curve senza dar luogo a discontinuità.
Fra le più significative citiamo: ovali (curve chiuse simmetriche rispetto a due assi ortogonali costituite da quattro archi raccordati), ovoli (curve chiuse simmetriche rispetto ad un asse costituite dal raccordo di una semicirconferenza e tre archi) e spirali policentriche (curve aperte formate da archi di circonferenza di raggi crescenti raccordati).
Non tutte le curve possono essere costruite attraverso l'utilizzo di archi di circonferenza. Fra queste citiamo le coniche (ellisse, parabola, iperbole) date dall'intersezione di un piano secante con una superficie

conica, che presuppongono concetti come quello della proiezione e sezione che saranno specificamente trattati nell'ambito delle proiezioni ortogonali. Alcuni tipi di spirali come quella di Archimede, o la logaritmica, evolventi e cicloidi, che inseriscono nell'ambito delle costruzioni geometriche il concetto di rappresentazione dello spostamento di punti rispetto a enti geometrici definiti (punti, rette, circonferenze) sono costruzioni imperfette realizzabili solo attraverso la determinazione di punti debitamente raccordati attraverso l'uso di adeguati curvilinei.

Cerchio

Il cerchio è la porzione di piano delimitata da una linea chiusa, detta circonferenza, i cui punti sono equidistanti da un punto detto centro. La distanza di un qualsiasi punto della circonferenza dal centro è detta raggio. La corda è il segmento che unisce due punti della circonferenza. Il diametro è la corda maggiore passante per il centro. Il centro divide sempre il diametro in due parti uguali. L'arco è la porzione di circonferenza delimita da due punti detti estremi. Due diametri perpendicolari dividono il cerchio in quattro quadranti. Il settore circolare è la parte di cerchio compresa fra un arco e due raggi passanti per gli estremi. Un diametro divide la circonferenza e il cerchio rispettivamente in semicirconferenza e semicerchio. Il segmento circolare è compreso da un arco e dalla rispettiva corda. La retta secante taglia la circonferenza in due punti. La tangente è una retta che ha un solo punto in comune con la circonferenza. Due circonferenze si definiscono esterne se tutti i punti di una sono all'esterno rispetto all'altra, secanti se presentano due punti di intersezione e i due cerchi corrispondenti occupano parzialmente la stessa superficie, tangenti se presentano un solo punto di contatto. Si definiscono altresì interne le circonferenze i cui punti si trovano all'interno dell'altra. Sono dette concentriche circonferenze interne che condividono lo stesso centro.

Poligoni

Il poligono è una porzione limitata di piano delimitata da una linea spezzata chiusa. Esso è costituito da: perimetro ovvero la serie di segmenti (lati) che ne delimitano il contorno. I vertici sono i punti in comune a due lati consecutivi. Le diagonali sono segmenti che uniscono vertici non adiacenti.

Il poligono si definisce equilatero se ha i lati di uguale lunghezza ed equiangolo se ha gli angoli della stessa ampiezza. Si definisce poligono regolare se sono uguali sia gli angoli che i lati. L'apotema unisce, in un poligono regolare, il centro con il punto medio di un lato. È detto poligono convesso se non è tagliato dal prolungamento dei suoi lati, negli altri casi è concavo. Un poligono è inscritto ad una circonferenza se tutti i suoi vertici si trovano su di essa, mentre è circoscritta alla circonferenza se tutti i suoi lati sono ad essa tangenti.

I vertici, punto di coincidenza di due lati consecutivi, identificano i poligoni, e sono individuati da lettere maiuscole dell'alfabeto. I poligoni sono classificati in base al numero di lati: triangolo (tre), quadrato (quattro), pentagono (cinque), esagono (sei), ettagono (sette), ottagono (otto), ennagono (nove), decagono (dieci), endecagono (undici), dodecagono (dodici), pentadecagono (quindici), icosagono (venti).

Triangoli e Quadrilateri

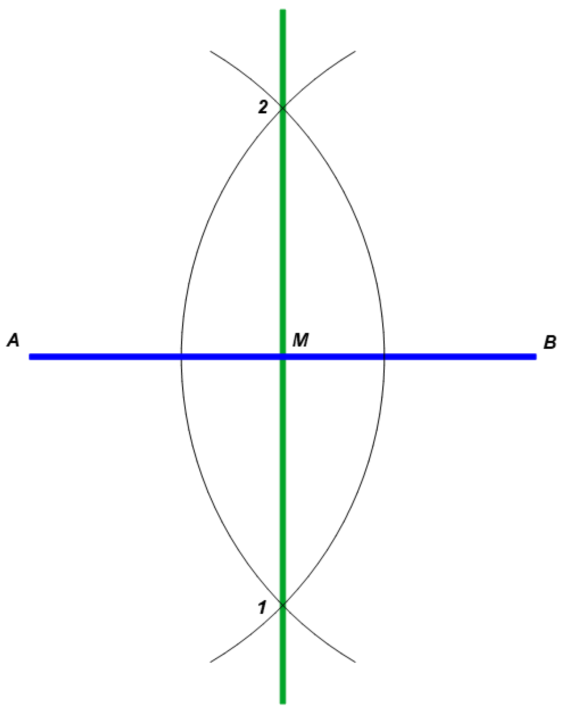
Particolare rilevanza nell'ambito dei poligoni rivestono i triangoli e i quadrilateri. Se prendiamo in considerazione la misura dei lati il triangolo si definisce equilatero, come si detto nella regola generale, se ha i tre lati uguali, isoscele se ne ha due, scaleno se ha i tre lati disuguali. Tenendo conto, come limite, che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre pari a 180°, il triangolo è detto ottusangolo se presenta un angolo ottuso, acutangolo se è costituito da tre angoli acuti e rettangolo se uno dei tre angoli è retto. In particolare nel triangolo rettangolo i due lati che formano l'angolo retto sono detti cateti mentre il terzo lato è detto ipotenusa. Il baricentro è il punto di intersezione delle mediane ovvero i segmenti che uniscono il punto medio di ciascun lato con il vertice opposto. L'ortocentro è il punto d'intersezione delle tre altezze del triangolo ovvero le perpendicolari ai lati passanti per il vertice opposto. Il circumcentro, punto d'incontro delle mediatrici, ovvero le perpendicolari ai lati passanti per il loro punto medio, rappresenta anche il centro della circonferenza circoscritta. Analogamente, l'incentro, punto d'incontro delle bisettrici che, come abbiamo visto in precedenza, dividono gli angoli in due parti uguali, rappresenta il centro della circonferenza inscritta nel triangolo.

Il quadrilatero è un qualunque poligono composto da quattro lati e quattro angoli. Si definisce genericamente parallelogrammo il quadrilatero con i lati opposti paralleli. Il parallelogrammo è caratterizzato da diagonali che si intersecano nel loro punto medio, angoli opposti uguali e angoli adiacenti supplementari ovvero la loro somma forma un angolo piatto.

Il rettangolo è un particolare parallelogrammo in cui gli angoli formati dai lati sono retti e le diagonali uguali. In particolare ognuna delle due diagonali divide il rettangolo in due triangoli retti congruenti.

Il rombo è un parallelogramma le cui diagonali, costituite dalle bisettrici si intersecano ortogonalmente. Il quadrato presenta lati uguali, angoli retti divisi in due parti uguali dalle due diagonali fra loro di uguale lunghezza, intersecantesi nel loro punto medio. I trapezi infine sono quadrilateri caratterizzati da due lati opposti paralleli (basi). Si definisce rettangolo il trapezio in cui un lato forma angoli retti rispetto alle basi, mentre si definisce isoscele se presenta i due lati inclinati di uguale lunghezza. Il trapezio scaleno ha i lati obliqui disuguali.

Costruzioni geometriche | Rette | Perpendicolari

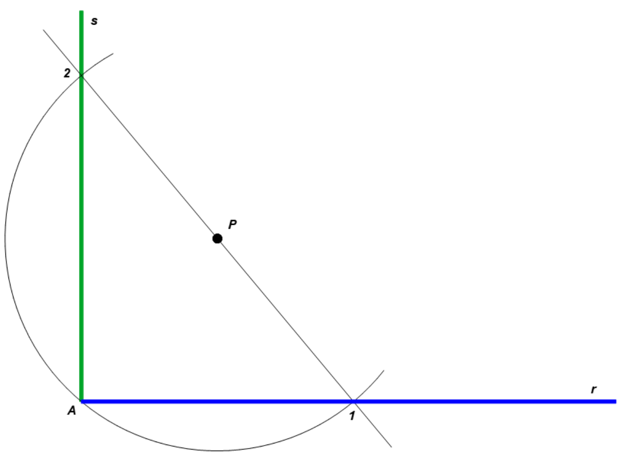


Perpendicolare passante per il punto medio di un segmento

Tracciare il segmento AB.

Puntare in A e tracciare un arco che interseca il segmento AB. Con la stessa apertura puntare in B e tracciare un secondo arco che interseca il primo nei punti 1 e 2.

La retta passante per 1-2 individua su AB il punto medio M.

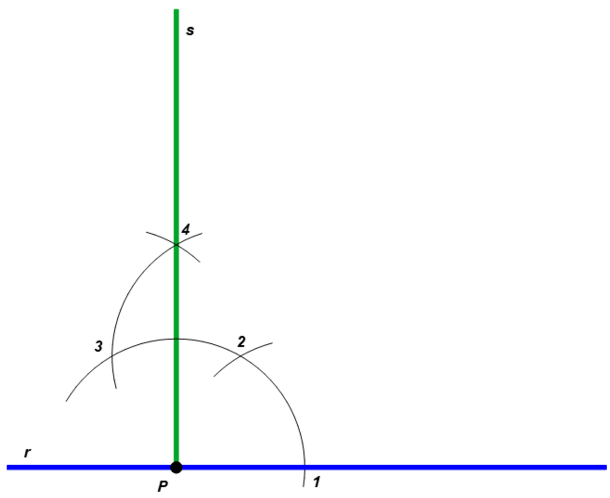


Perpendicolare passante nell'origine di una semiretta

Tracciare la semiretta r di origine A. Individuare il punto P esterno a r.

Puntando su P con apertura AP tracciare l'arco che interseca r nel punto 1. Tracciare la retta passante per 1-P e individuare 2 nell'intersezione con l'arco.

Tracciare s passante per A-2 perpendicolare a r.

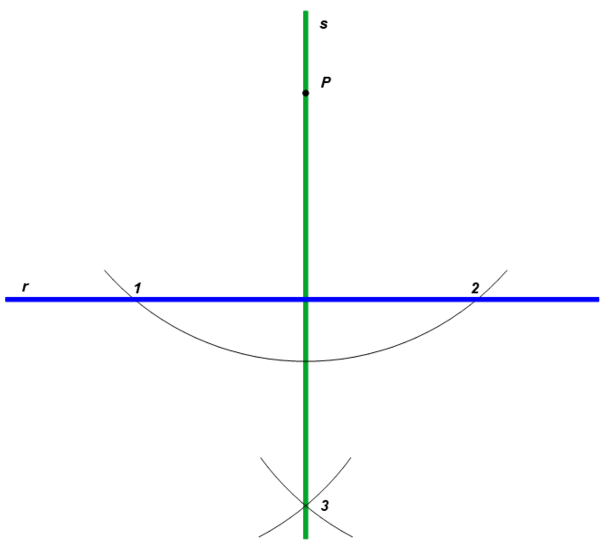


Perpendicolare passante per un punto P appartenente ad una retta

Tracciare una retta r e un punto P appartenente ad essa.
Con apertura di compasso a piacere puntare in P tracciare un arco e determinare 1 sulla retta r.

Con la stessa apertura di compasso:
puntare su 1 e determinare 2.
puntare su 2 e determinare 3.
puntare su 3 e determinare 4.

Tracciare la retta s perpendicolare a r passante per P e per 4.



Perpendicolare passante per un punto esterno

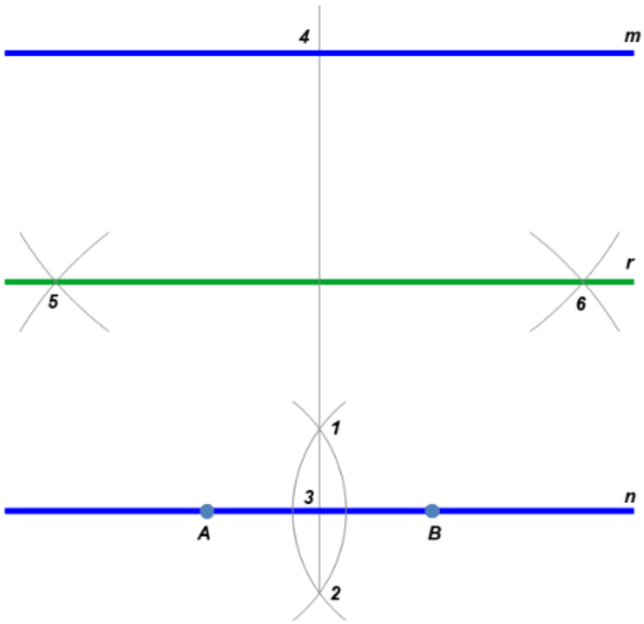
Tracciare una retta r e un punto P esterno ad essa.
Con apertura di compasso generica puntare in P e tracciare un arco che intercetta la retta r nei punti 1 e 2.

Puntare il compasso prima in 1 e poi in 2 e tracciare due archi che si intersecano nel punto 3.

Tracciare la retta s passante per P e per 3 ortogonale alla retta r.

L'insieme di infiniti punti allineati è definito retta, caratterizzata da assenza di spessore, lunghezza infinita e direzione nello spazio. Le rette si indicano con lettere minuscole. Due rette che intersecandosi formano quattro angoli uguali (retti) si definiscono perpendicolari, oppure oblique se formano angoli differenti.

Costruzioni geometriche | Rette | Parallele

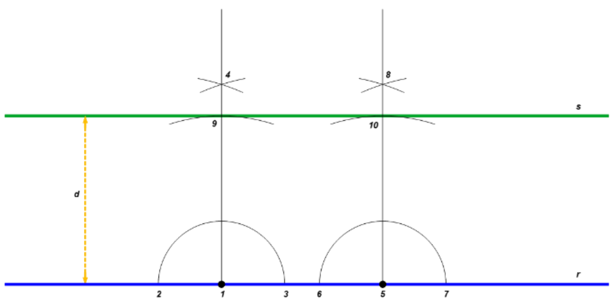


Retta equidistante da due rette parallele.

Date le rette parallele m ed n, fissare a piacere i punti A e B, tracciare due archi e determinare nelle intersezioni i punti 1 e 2. La retta passante per i punti 1 e 2 perpendicolare a m ed n intercetta le rette nei punti 3 e 4.

Puntando su 3 e 4 tracciare gli archi con la stessa apertura a piacere e determinare nelle intersezioni i punti 5 e 6.

Tracciare r equidistante da n ed m passate per i punti 5 e 6.

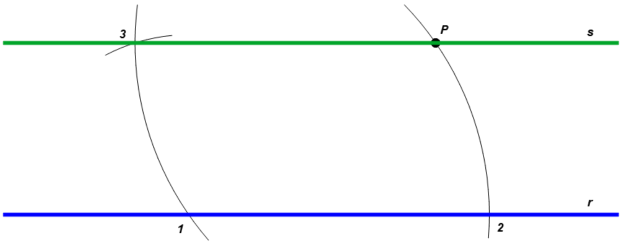


Retta parallela ad una distanza data

Tracciare la retta di riferimento r. In un punto 1, preso a piacere sulla retta tracciare una semicirconferenza e individuare i punti 2 e 3. Con apertura di compasso a piacere tracciare due archi puntando su 2 e su 3, e determinare l'intersezione 4. Tracciare la retta ortogonale alla r passante per 1 e per 4.

Nel punto 5, preso a piacere sulla retta, tracciare una semicirconferenza e individuare i punti 6 e 7. Con apertura di compasso a piacere tracciare due archi puntando su 6 e su 7, e determinare l'intersezione 8. Tracciare la retta ortogonale passante per 5 e per 8.

Stabilire la distanza d. Puntare su 1 tracciare un arco di raggio d e determinare il punto 9 sulla perpendicolare. Ripetere l'operazione partendo dal punto 5 e determinare il punto 10 sulla perpendicolare.
Tracciare la retta s passante per 9 e 10 parallela a r alla distanza d.

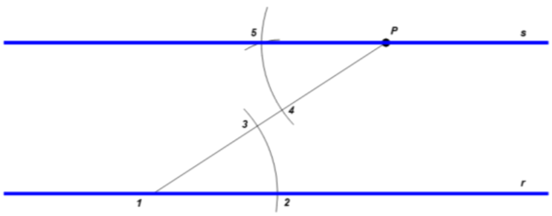


Parallela alla retta passante per un punto esterno (1)

Tracciare la retta di riferimento r. Fissare a piacere la posizione del punto P. Puntare su P e tracciare un arco che interseca la retta r nel punto 1.

Puntare nel punto 1 e tracciare un arco con la stessa apertura e determinare 2 su r. Puntare nel punto 1 e tracciare un arco di raggio 2-P e determinare l'intersezione 3.

Tracciare la retta s passante per 3-P parallela a r.



Parallela alla retta passante per un punto esterno (2)

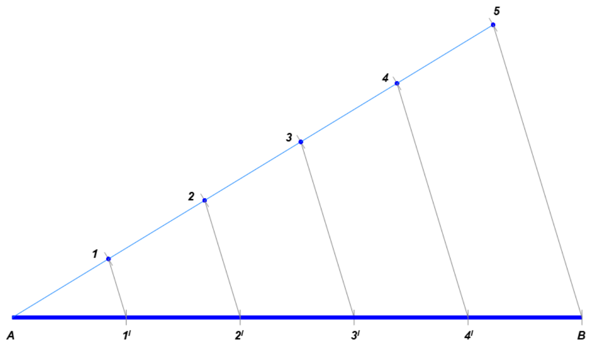
Tracciare la retta di riferimento r. Fissare a piacere un punto P esterno alla retta r. Fissare a piacere il punto 1 sulla retta r. Tracciare il segmento 1-P. Puntare in 1 tracciare un arco e individuare i punti 2 su r, e 3 su 1-P.

Puntare in P tracciare un arco con la stessa apertura di compasso e individuare il punto 4. Con apertura di compasso 2-3 puntare nel punto 4, tracciare un arco e determinare il punto 5.

Tracciare la retta s, parallela alla retta data r, passante per P-5.

Il parallelismo è la condizione in cui si trovano due rette i cui punti mantengono la stessa distanza minima uno dall'altro o piani non aventi punti in comune. Tale relazione si esprime con una doppia barra obliqua //.

Costruzioni geometriche | Rette | Divisione di segmenti

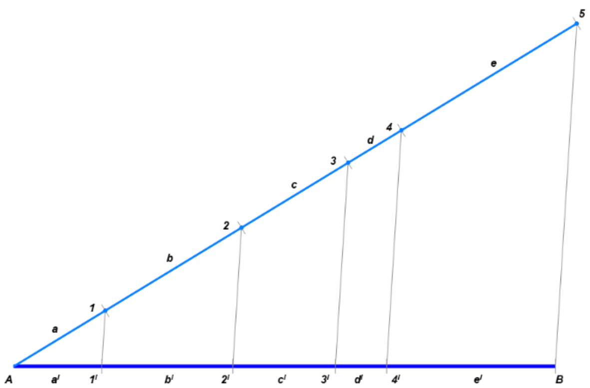


Divisione di un segmento in cinque parti uguali

Dato il segmento AB, tracciare con inclinazione generica a partire da A la semiretta r.

Individuare su r cinque segmenti unitari riportando gli estremi 1, 2, 3, 4 e 5.

Tracciare il segmento 5B e successivamente le parallele ad esso passanti per i punti 4, 3, 2 e 1. I punti 1^I, 2^I, 3^I, 4^I dividono AB in cinque parti uguali.



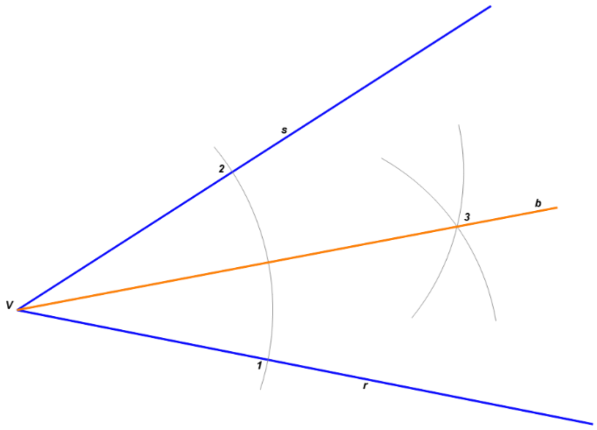
Divisione di un segmento in parti proporzionali a segmenti dati

Dato il segmento AB, tracciare con inclinazione generica a partire da A la semiretta r.

Riportare su r consecutivamente i segmenti dati a, b, c, d ed e, individuandone gli estremi 1, 2, 3, 4 e 5. Tracciare il segmento 5B.

Le direzioni parallele a 5B passanti per i punti 4-3-2-1 intercettano AB nei punti 4^I-3^I-2^I-1^I che dividono AB in a^I, b^I, c^I, d^I, e^I, segmenti proporzionali ai segmenti dati.

Costruzioni geometriche | Rette | Bisettrici

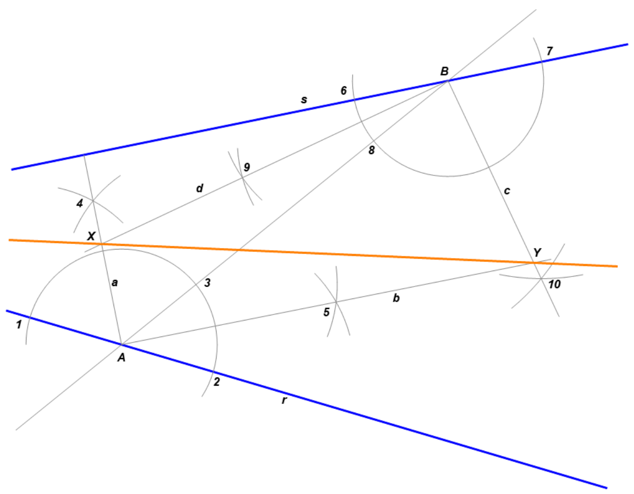


Bisettrice – Divisione di un angolo in due parti uguali

Tracciare le rette generiche r ed s di vertice V. Puntando in V tracciare un arco e individuare i punti 1 e 2 su r ed s.

Puntando su 1 e 2 tracciare due archi e individuare il punto 3.

Tracciare b la bisettrice passante per V-3.



Bisettrice con vertice al di fuori dell'area del disegno

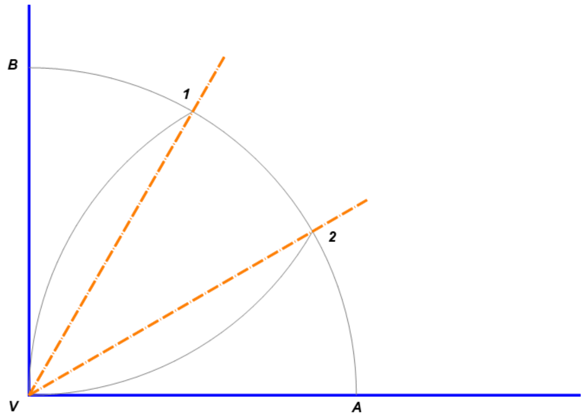
Tracciare le rette generiche r ed s. Tracciare una retta trasversale generica e determinare A e B. Tracciare un arco generico e individuare i punti 1 e 2 su r, e 3 su AB. Puntando con medesima apertura, su 3 e su 1 tracciare gli archi e determinare 4. Tracciare a passante per A4. Puntando con medesima apertura, su 2 e su 3 tracciare gli archi e determinare 5.

Tracciare b passante per A5. Tracciare un arco generico e individuare i punti 6 e 7 su s, e 8 su AB. Puntando con medesima apertura, su 6 e su 8 tracciare gli archi e determinare 9.

Tracciare d passante per B9 e individuare X sulla retta a. Puntando con medesima apertura, su 7 e su 8 tracciare gli archi e determinare 10. Tracciare c passante per B10 e individuare Y sulla retta b. Tracciare la retta passante per X e Y, bisettrice dell'angolo compreso fra r ed s con vertice inaccessibile.

La bisettrice è una semiretta, con origine nel vertice, che divide un angolo in due parti uguali.

Costruzioni geometriche | Rette | Divisione di angoli

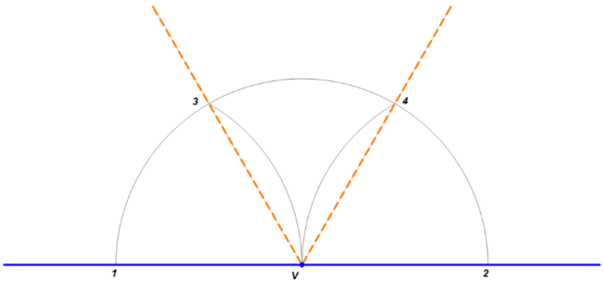


Divisione dell'angolo retto in tre parti uguali

Impostare un angolo retto di vertice V. Tracciare puntando in V un arco a piacere AB.

Con la stessa apertura puntare in A e determinare 1 e successivamente puntare in B e determinare 2.

Le rette V1 e V2 dividono l'angolo retto in tre parti uguali.

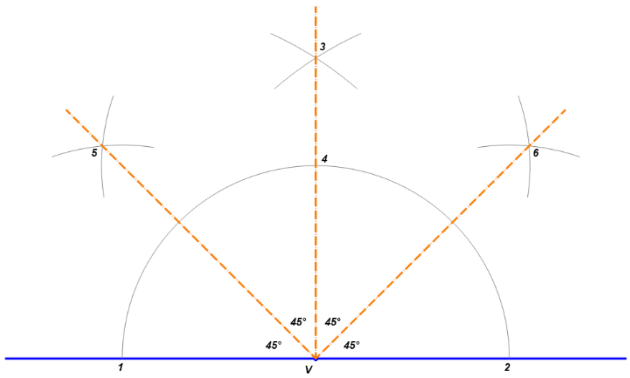


Divisione dell'angolo piatto in tre parti uguali

Impostare un angolo piatto di vertice V. Puntare nel punto V, tracciare una semicirconferenza e individuare i punti 1 e 2.

Puntare in 1 con apertura 1-V tracciare un arco che intercetta nel punto 3 la semicirconferenza. Ripetere puntando su 2 e determinare il punto 4.

Le rette V3 e V4 dividono l'angolo piatto in tre parti uguali.

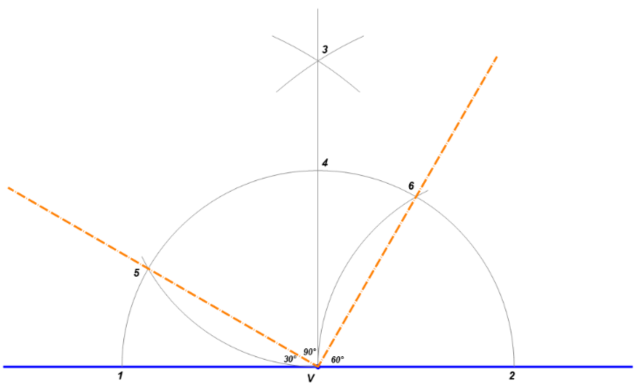


Divisione dell'angolo piatto in quattro parti uguali

Impostare un angolo piatto di vertice V. Puntare nel punto V, tracciare una semicirconferenza e individuare i punti 1 e 2. Tracciare puntando in 1 e successivamente in 2, due archi che si intersecano nel punto 3.

Tracciare la retta passante per V-3 e determinare il punto 4 sulla semicirconferenza. Tracciare puntando in 1 e successivamente in 4, due archi che si intersecano nel punto 5. Tracciare la retta passante per V-5. Tracciare puntando in 4 e successivamente in 2, due archi che si intersecano nel punto 6. Tracciare la retta passante per V-6.

Le rette V-5, V-3 e V-6 dividono l'angolo piatto in quattro parti uguali.



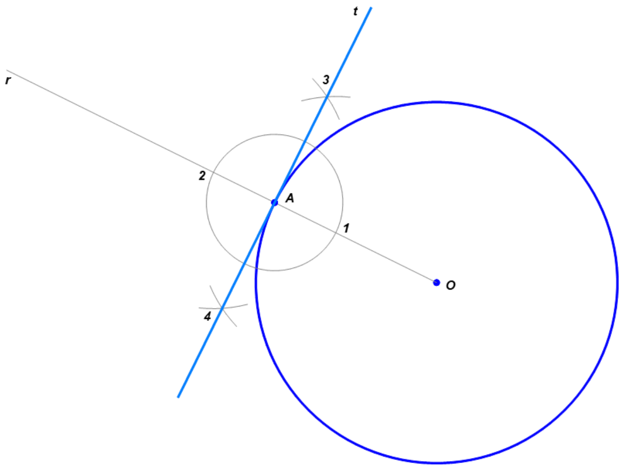
Divisione di un angolo piatto in tre angoli consecutivi: 30° - 90° - 60°.

Impostare un angolo piatto di vertice V. Puntare nel punto V, tracciare una semicirconferenza e individuare i punti 1 e 2. Tracciare puntando in 1 e successivamente in 2, due archi che si intersecano nel punto 3.

Tracciare la retta passante per V3 e individuare il punto 4 nell'intersezione con l'arco. Puntare nel punto 4 e tracciare con apertura 4V l'arco che intercetta il precedente di centro V nel punto 5. Allo stesso modo puntare nel punto 2, tracciare l'arco con apertura 2V e determinare il punto 6. La retta passante per V5 forma un angolo di 30° rispetto all'orizzontale 1V. La retta passante per V6 forma un angolo di 90° rispetto alla retta V5 e di 60° rispetto alla direzione orizzontale V2.

L'angolo è la porzione di piano individuato da due semirette aventi origine in un punto detto vertice. Si intende per angolo concavo la regione di piano contenente il prolungamento dei lati, mentre l'altra definisce l'angolo convesso.

Costruzioni geometriche | Rette | Tangenti

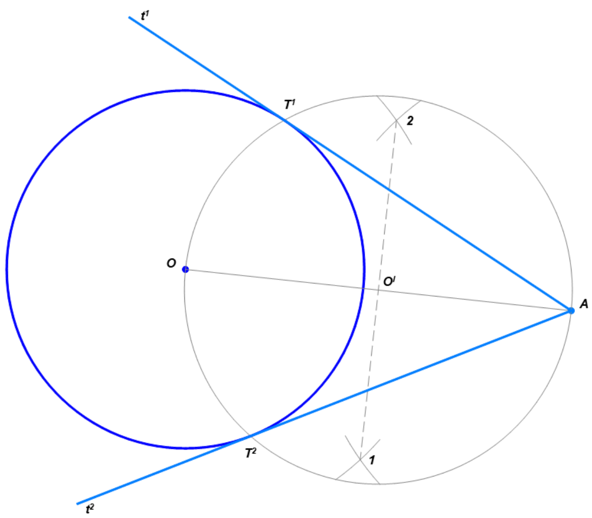


Tangente alla circonferenza passante per un suo punto

Tracciare la circonferenza di centro O e raggio OA. Tracciare la semiretta r con origine in O passante per A.

Tracciare una circonferenza di centro A e raggio a piacere e individuare i punti 1 e 2 sulla retta r. Puntare su 1 e 2, tracciare gli archi che determinano le intersezioni 3 e 4.

La retta passante per 3 e 4 è la tangente alla circonferenza passante per il punto A.



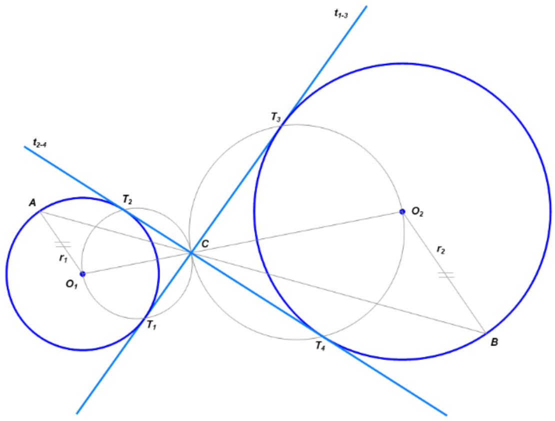
Tangente alla circonferenza passante per un punto esterno

Data la circonferenza di centro O e un punto A esterno ad essa tracciare il segmento OA.

Puntare il compasso su O e su A con apertura a piacere, tracciare gli archi e determinare le intersezioni 1 e 2. Tracciare 1-2 asse del segmento OA e determinare OI. La circonferenza di diametro OA e centro O^I interseca la circonferenza di centro O nei punti T^1 e T^2.

Tracciare le semirette, con origine in A e passanti per i punti T^1 e T^2, tangenti alla circonferenza di centro O.

La tangente è una retta che, come richiama l'etimologia del termine, tocca in un solo punto un arco, una generica curva o una circonferenza.

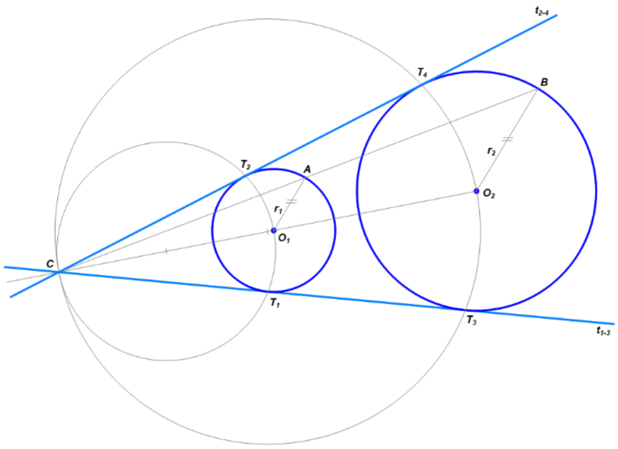


Tangenti interne a due circonferenze

Data le circonferenze di centro O_1 e O_2 tracciare il segmento O_1-O_2. Tracciare con direzione a piacere il raggio r_1 di centro O_1 che individua il punto A sulla circonferenza. Tracciare il raggio r_2 parallelo a r_1, di centro O_2 che individua il punto B sulla circonferenza. Tracciare il segmento AB che interseca O_1-O_2 nel punto C.

Tracciare la circonferenza di diametro O_1-C e individuare nella circonferenza di centro O_1 le intersezioni T_1 e T_2. Tracciare la circonferenza di diametro O_2-C e individuare nella circonferenza di centro O_2 le intersezioni T_3 e T_4. Tracciare la retta t_{1-3} passante per T_1, T_3 e C tangente interna alle due circonferenze di centro O_1 e O_2.

Tracciare la retta t_{2-4} passante per T_2, T_4 e C tangente interna alle due circonferenze di centro O_1 e O_2.



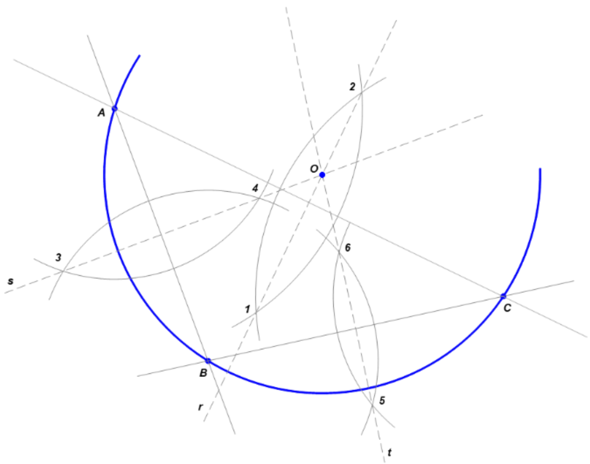
Tangenti esterne a due circonferenze

Data le circonferenze di centro O_1 e O_2 tracciare la semiretta O_2-O_1 con origine in O_2. Tracciare con direzione a piacere il raggio r_1 di centro O_1 che individua il punto A sulla circonferenza. Tracciare il raggio r_2 parallelo a r_1, di centro O_2 che individua il punto B sulla circonferenza. Tracciare il segmento AB che interseca la semiretta con origine in O_2 nel punto C.

Tracciare la circonferenza di diametro C-O_1 e individuare nella circonferenza di centro O_1 le intersezioni T_1 e T_2. Tracciare la circonferenza di diametro C-O_2 e individuare nella circonferenza di centro O_2 le intersezioni T_3 e T_4. Tracciare la retta t_{2-4} passante per T_2, T_4 e C tangente esterna alle due circonferenze di centro O_1 e O_2.

Tracciare la retta t_{1-3} passante per T_1, T_3 e C tangente esterna alle due circonferenze di centro O_1 e O_2.

Costruzioni geometriche | Curve | Archi

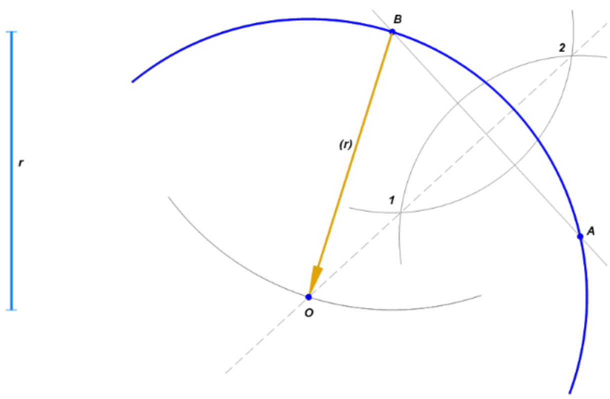


Determinazione del centro di un arco di circonferenza dato.

Dato un arco individuare a piacere tre punti A, B e C. Tracciare le rette passanti per AB, BC e AC.

Determinare l'asse di AC. Tracciare due archi con la stessa apertura a piacere puntando in A e C individuando i punti di intersezione 1 e 2. Tracciare r, l'asse di AC passante per 1-2.

Determinare l'asse di AB. Tracciare due archi con la stessa apertura a piacere puntando in A e B individuando i punti di intersezione 3 e 4. Tracciare s, l'asse di AB passante per 3-4. Determinare l'asse di BC. Tracciare due archi con la stessa apertura a piacere puntando in B e C individuando i punti di intersezione 5 e 6. Tracciare t, l'asse di BC passante per 5-6. L'intersezione degli assi r-s-t individua il punto O centro dell'arco dato.



Arco di raggio dato passante per due punti

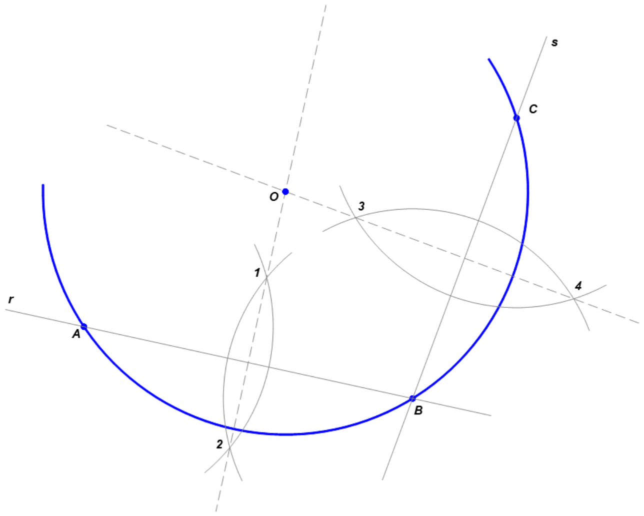
Dati due punti A e B, noto il raggio r tracciare la retta passante per AB.

Asse di A-B. Puntare con la stessa apertura a piacere in A e B e determinare nelle intersezioni i punti 1 e 2. Tracciare s, asse di A-B, passante per i punti 1 e 2.

Puntare in B e con apertura pari al raggio r tracciare un arco che intercetta l'asse s nel punto O. Tracciare l'arco di centro O passante per AB.

Le curve continue e dotate di tangente unica in ogni punto, come ad esempio le circonferenze o le coniche, si definiscono regolari. L'arco è la parte di curva regolare compresa fra due suoi punti, detti estremi dell'arco.

Arco passante per tre punti



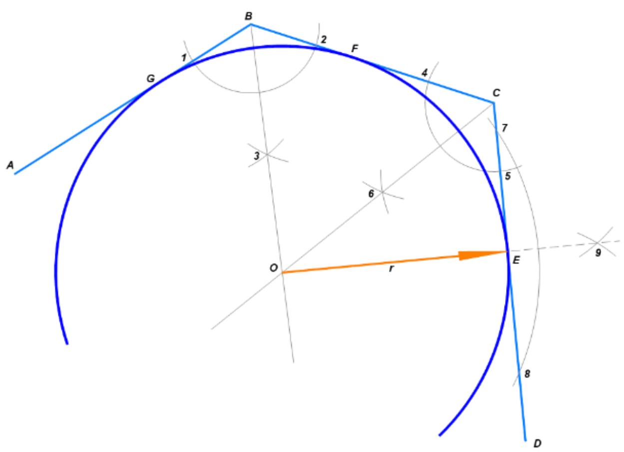
Dati tre punti A, B e C tracciare la retta r passante per AB e la retta s passante per BC.

Tracciare:

- due archi puntando con la stessa apertura a piacere in A e in B e determinare le intersezioni 1 e 2.
- l'asse di AB passante per 1-2.
- due archi puntando con la stessa apertura a piacere in B e in C e determinare le intersezioni 3 e 4.
- l'asse di BC passante per 3-4.

L'intersezione O degli assi di AB e BC rappresenta il centro dell'arco passante per i tre punti dati A, B e C.

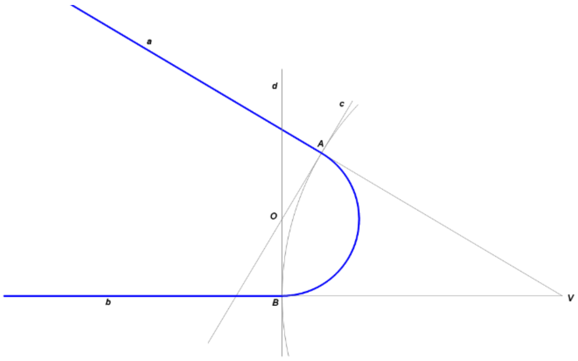
Arco tangente a tre lati di una poligonale



Data la poligonale aperta A - B - C – D costruire la bisettrice dell'angolo in B tracciando con apertura a piacere, puntando in B, l'arco che interseca AB nel punto 1 e BC nel punto 2. Puntare in 1 e 2, tracciare con la stessa apertura a piacere due archi che si intersecano nel punto 3. Costruire la bisettrice dell'angolo in C tracciando con apertura a piacere, puntando in C, l'arco che interseca BC nel punto 4 e CD nel punto 5. Puntare in 4 e 5, tracciare con la stessa apertura a piacere due archi che si intersecano nel punto 6. Tracciare C-6 bisettrice dell'angolo in C e determinare O nell'intersezione con B-3 bisettrice dell'angolo in B.

Con apertura di compasso a piacere, puntare in O e tracciare un arco che interseca CD nei punti 7 e 8. Tracciare, puntando in 7 e 8 due archi uguali, raggio a piacere, che si intersecano nel punto 9. O-9 ortogonale a CD lo interseca nel punto E. OE è il raggio dell'arco tangente alla poligonale.

Costruzioni geometriche | Curve | Raccordi

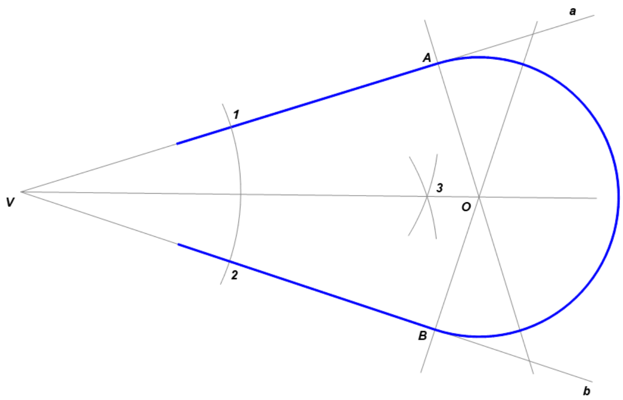


Raccordo di due rette a e b da un punto A di una delle rette date (ver. 1)

Tracciare a piacere la retta b. Tracciare a partire da V la retta generica a. Individuare nella retta a il punto A.

Tracciare dal punto A la retta c ortogonale alla retta a. Puntando su V tracciare l'arco di raggio AV e individuare B sulla retta b. Tracciare la retta d ortogonale alla retta b e individuare il punto O.

Puntando su O con apertura OA tracciare l'arco di raccordo AB. Evidenziare la retta b fino al punto B.



Raccordo di due rette a e b da un punto A di una delle rette date (ver. 2)

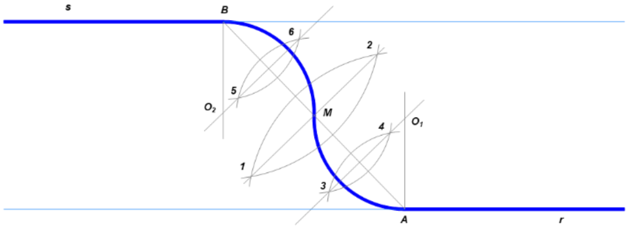
Tracciare a piacere la retta b. Tracciare a partire da V la retta generica a. Individuare nella retta a il punto A. Tracciare dal punto A la retta c ortogonale alla retta a.

Puntando su V tracciare l'arco di raggio a piacere e individuare 1 e 2 rispettivamente sulle rette a e b. Puntare su 1 e 2 con apertura a piacere tracciare due archi e determinare nell'intersezione il punto 3. La bisettrice V3 intercetta nel punto O la retta c.

Tracciare la perpendicolare a b passante per O. Puntando su O con apertura OA tracciare l'arco di raccordo AB. Dal punto B ripassare il prolungamento della retta b.

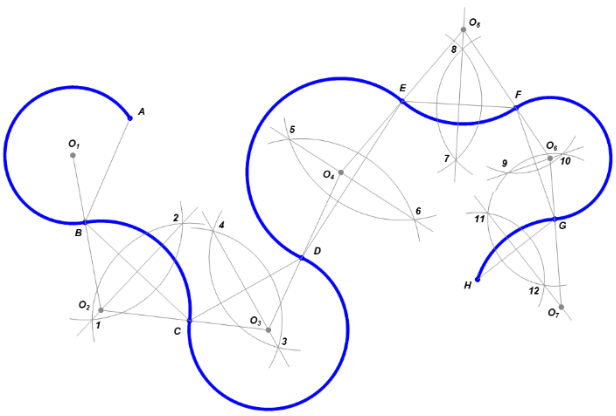
Il raccordo è un collegamento fra due curve o fra retta e curva che avviene senza discontinuità. Il punto di contatto fra due curve determina il passaggio da concavità a convessità.

Raccordo di due rette parallele con due archi di raggio uguale



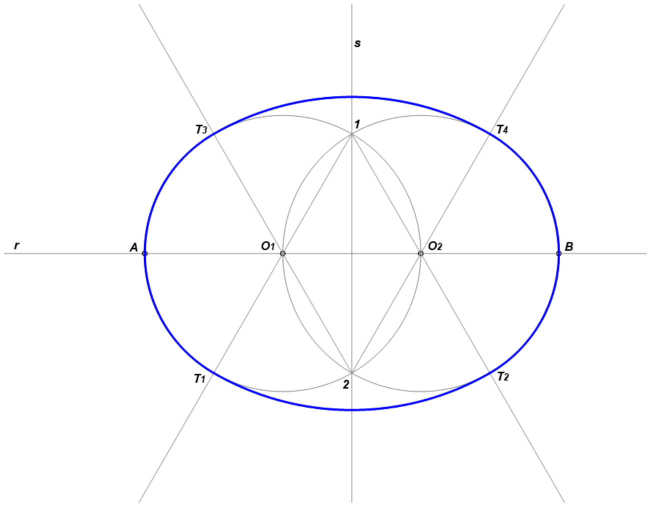
Date due rette parallele r ed s, Individuare A sulla retta r e B sulla retta s. Unire AB.
Tracciare due archi con apertura a piacere puntando in A e B, e individuare nelle intersezioni i punti 1 e 2. Tracciare la mediana di AB passante per 1-2 e individuare M punto medio di AB. Tracciare due archi con apertura a piacere puntando in A ed M, e individuare nelle intersezioni i punti 3 e 4. Tracciare la mediana di AM passante per 3-4. Tracciare due archi con apertura a piacere puntando in B ed M, e individuare nelle intersezioni i punti 5 e 6. Tracciare la mediana di BM passante per 5-6. Tracciare due archi con apertura a piacere puntando in B ed M, e individuare nelle intersezioni i punti 5 e 6. Tracciare la mediana di BM passante per 5-6. Tracciare la perpendicolare a r passante per A fino a intercettare la mediana 3-4 nel punto O_1. Puntare su O_1 con apertura O_1 A e tracciare l'arco di raccordo AM. Tracciare la perpendicolare a s passante per B fino a intercettare la mediana 5-6 nel punto O_2. Puntare su O_2 con apertura O_2 B e tracciare l'arco di raccordo BM.

Raccordo di un arco ab con una successione di sei punti generici



Posizionare sul piano a piacere i punti da A ad H. Dopo aver fissato a piacere il centro O_1 tracciare l'arco AB. Unire in successione i punti da A ad H. Puntare in C e B tracciare due archi uguali a piacere e determinare le intersezioni 1 e 2. Determinare O_2 intersezione fra l'asse 1-2 e la retta O_1 B centro dell'arco di raccordo BC. Tracciare l'arco BC. Puntare in C e D tracciare due archi uguali a piacere e determinare le intersezioni 3 e 4. Determinare O_3 intersezione fra l'asse 3-4 e la retta O_2 C centro dell'arco di raccordo CD. Tracciare l'arco CD. Puntare in D ed E tracciare due archi uguali a piacere e determinare le intersezioni 5 e 6. Determinare O_4 intersezione fra l'asse 5-6 e la retta O_3 D centro dell'arco di raccordo DE. Tracciare l'arco DE. Puntare in E ed F tracciare due archi uguali a piacere e determinare le intersezioni 7 e 8. Determinare O_5 intersezione fra l'asse 7-8 e la retta O_4 E centro dell'arco di raccordo EF. Tracciare l'arco EF. Puntare in F e G tracciare due archi uguali a piacere e determinare le intersezioni 9 e 10. Determinare O_6 intersezione fra l'asse 9-10 e la retta O_5 F centro dell'arco di raccordo FG. Tracciare l'arco FG. Puntare in G e H tracciare due archi uguali a piacere e determinare le intersezioni 11 e 12. Determinare O_6 intersezione fra l'asse 11-12 e la retta O_6 G centro dell'arco di raccordo GH. Tracciare l'arco GH.

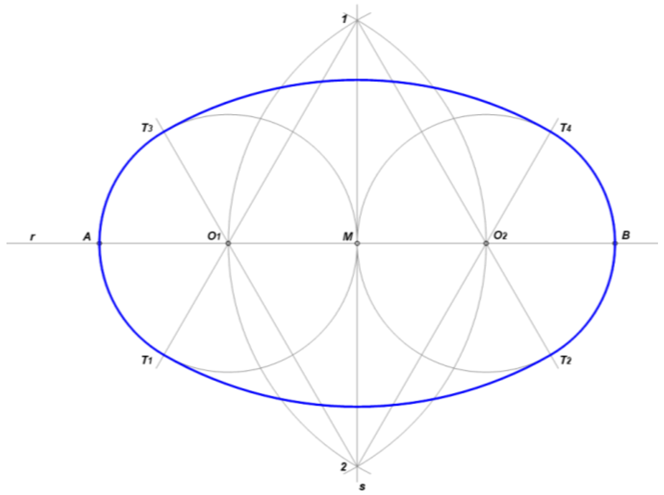
Costruzioni geometriche | Curve policentriche



Ovale: asse maggiore diviso in tre parti

Tracciare:
r retta d'appartenenza dell'asse maggiore AB diviso in tre parti uguali da O1 da e O2.
la circonferenza di centro O1 e raggio O1-A.
la circonferenza di centro O2 e raggio O2-B e individuare i punti 1 e 2 intersezioni fra le due circonferenze.
la retta s, asse di AB, passante per 1-2.
la retta 1-O1 e determinare il punto T1 sulla circonferenza di centro O1.
la retta 1-O2 e determinare il punto T2 sulla circonferenza di centro O2.
la retta 2-O1 e determinare il punto T3 sulla circonferenza di centro O1.
la retta 2-O2 e determinare il punto T4 sulla circonferenza di centro O2.

Puntare in O1 e tracciare l'arco T3-T1. Puntare in 1 e tracciare l'arco T1-T2. Puntare in O2 e tracciare l'arco T2-T4. Puntare in 2 e tracciare l'arco T4-T3.

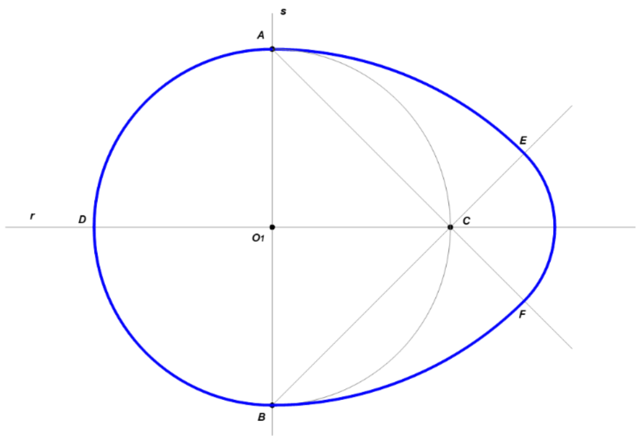


Ovale: asse maggiore diviso in quattro parti

Tracciare la retta d'appartenenza r dell'asse maggiore AB diviso in quattro parti uguali e individuare i punti O1, M e O2. Tracciare la circonferenza di centro O1 e raggio O1-A. Tracciare la circonferenza di centro O2 e raggio O2. Tracciare la retta s, asse di AB, passante per il punto medio M.

Tracciare l'arco di centro O2, raggio O1-O2 e determinare le intersezioni 1 e 2 sull'asse s. Tracciare l'arco di centro O1, raggio O1-O2 passante per i punti 1 e 2 sull'asse s. Tracciare la retta 1-O1 e determinare il punto T1 sulla circonferenza di centro O1. Tracciare la retta 1-O2 e determinare il punto T2 sulla circonferenza di centro O2. Tracciare la retta 2-O1 e determinare il punto T3 sulla circonferenza di centro O1. Tracciare la retta 2-O2 e determinare il punto T4 sulla circonferenza di centro O2.

Puntare in O1 e tracciare l'arco T3-T1.
Puntare in 1 e tracciare l'arco T1-T2.
Puntare in O2 e tracciare l'arco T2-T4.
Puntare in 2 e tracciare l'arco T4-T3.

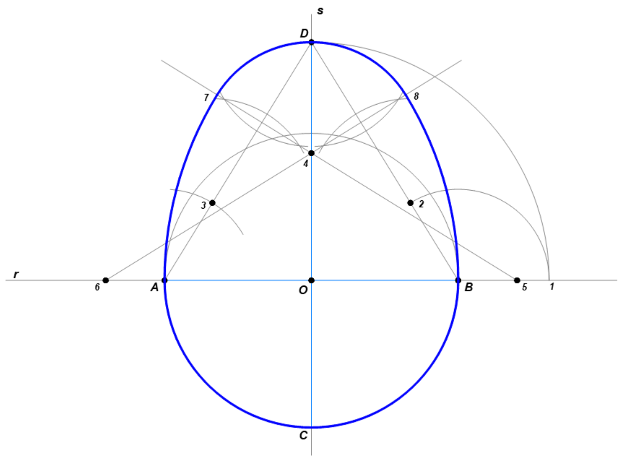


Ovolo data la misura dell'asse minore

Date una retta s individuare AB asse minore dell'ovolo. Tracciare un cerchio di diametro AB e centro O1. La retta r perpendicolare all'asse AB passante per O1 intercetta la circonferenza nei punti C e D.

Tracciare le rette passanti per AC e BC.

Puntare in B, tracciare l'arco di raggio AB e individuare il punto E sul prolungamento di BC. Puntare in A, tracciare l'arco di raggio AB e individuare il punto F sul prolungamento di AC. Puntare in C, tracciare l'arco di raggio CE (CF) e raccordare i punti E ed F.
Rappresentare con segno a vista gli archi:
BDA – AE – EF – FB.



Ovolo date le misure degli assi

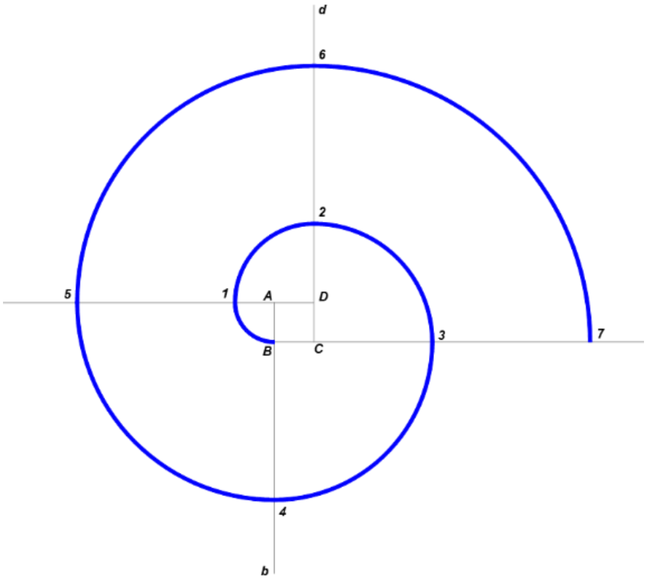
Sulla retta d'appartenenza r individuare l'asse minore AB. Tracciare la retta s ortogonale ad AB passante per il suo punto medio O. Tracciare la circonferenza di centro O, raggio OA e individuare C sulla retta s. Individuare sulla retta s l'asse maggiore CD. Unire AD e DB.

Puntare in O con apertura OD e tracciare un arco che interseca la retta r nel punto 1. Puntare in B con apertura B1 e tracciare un arco che interseca BD nel punto 2. Puntare in A con apertura B1 e tracciare un arco che interseca AD nel punto 3. Tracciare l'asse di D3 e determinare i punti 4 su CD e 5 sulla retta r. Tracciare l'asse di D2 e individuare 6 sulla retta r.

Ripassare l'arco di circonferenza AB. Puntare nel punto 6 con apertura 6B e tracciare un arco che interseca l'asse di 2D nel punto 8. Puntare nel punto 4 con apertura 4-8 e tracciare un arco passante per D che interseca l'asse di 3D nel punto 7. Per completare la costruzione dell'ovolo puntare nel punto 5 con apertura 5A e tracciare l'arco che unisce A con 7.

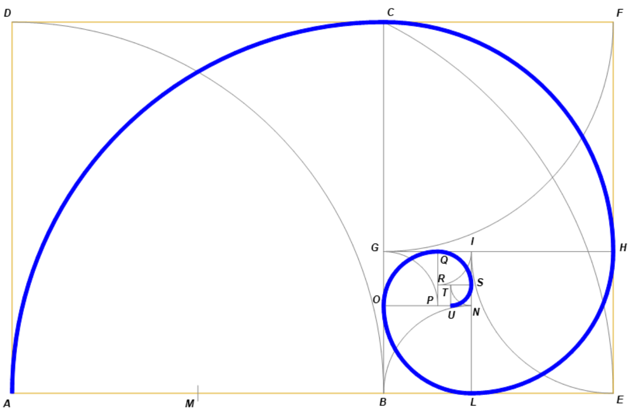
Le curve policentriche sono costituite da archi di circonferenza aventi centri diversi raccordati. I raccordi uniscono le curve senza dar luogo a discontinuità. Gli ovali sono curve chiuse simmetriche rispetto a due assi ortogonali costituite da quattro archi raccordati mentre gli ovoli sono curve chiuse simmetriche rispetto ad un asse, costituite dal raccordo di una semicirconferenza e tre archi.

Costruzioni geometriche | Curve policentriche



Spirale policentrica costruita su quarti di circonferenza

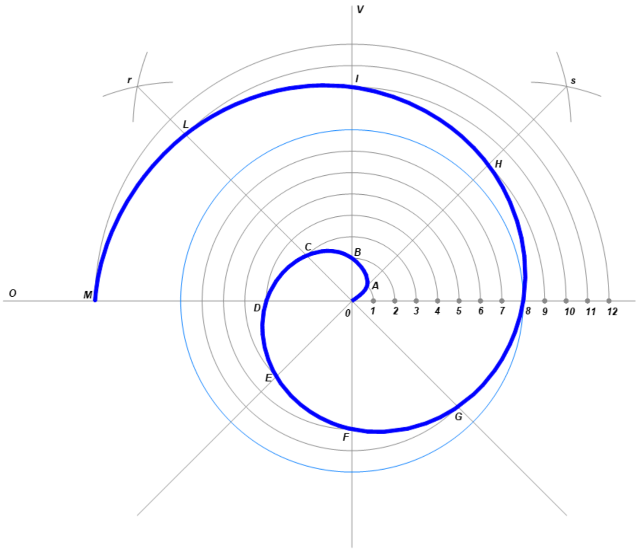
Tracciare un quadrato ABCD.
Prolungare i lati tracciando le semirette: a, b, c, d.
Puntare su A, tracciare l'arco di raggio AB e determinare 1 su a.
Puntare su D, tracciare l'arco di raggio D1 e determinare 2 su d.
Puntare su C, tracciare l'arco di raggio C2 e determinare 3 su c.
Puntare su B, tracciare l'arco di raggio B3 e determinare 4 su b.
Puntare su A, tracciare l'arco di raggio A4 e determinare 5 su a.
Puntare su D, tracciare l'arco di raggio D5 e determinare 6 su d.
Puntare su C, tracciare l'arco di raggio C6 e determinare 7 su c.
Completamento degli archi di raccordo.



Spirale aurea

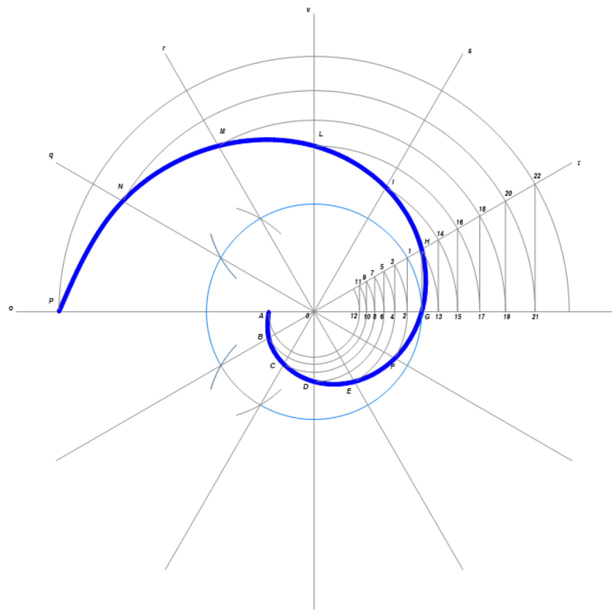
Tracciare la semiretta orizzontale con origine in A. Impostare il lato AD. Puntando in A tracciare l'arco che intercetta la semiretta nel punto B.
Tracciare la perpendicolare passante per B. Tracciare la retta orizzontale passante per A e individuare C sulla perpendicolare. Puntare su M, punto medio di AB, tracciare l'arco di raggio MC e individuare E sul prolungamento di AB. Tracciare la perpendicolare per E. Prolungare DC fino a individuare F sulla perpendicolare per E. Fine della costruzione del rettangolo aureo: AEFD. Proprietà (AE:AB = AB:BE). Puntare su C con apertura CF e tracciare l'arco che individua G su BC. Tracciare per G la retta orizzontale che individua H su EF. Puntare su H con apertura HE e tracciare l'arco che individua I su HG. Tracciare per I la retta verticale che individua L su EB. Puntare su L con apertura LB e tracciare l'arco che individua N su LI. Tracciare per N la retta orizzontale che individua O su BG. Puntare su O con apertura OG e tracciare l'arco che individua P su ON. Tracciare per P la retta verticale che individua Q su GI. Puntare su Q con apertura QI e tracciare l'arco che individua R su PQ. Tracciare per R la retta orizzontale che individua S su IN. Puntare su S con apertura SN e tracciare l'arco che individua T su SR. Tracciare per R la retta verticale che individua U su NP. Tracciare i seguenti archi: AC puntando su B; CH puntando su G; HL puntando su I; LO puntando su N; OQ puntando su P; QS puntando su R; SU puntando su T. Ripassare la spirale con segno di linea continua.

Costruzioni geometriche | Curve policentriche



Spirale Di Archimede

Tracciare gli assi orizzontale (O), verticale (V) e determinare nell'intersezione il punto 0.
Tracciare una circonferenza di raggio 0-8 sull'asse O.
Dividere il raggio 0-8 in 8 parti uguali estendendo l'individuazione dei punti alla stessa distanza fino a 12 lungo l'asse O. Dividere la circonferenza in 8 parti tracciando gli assi inclinati di 45° r-0 ed s-0.
Puntare nel centro 0 e tracciare gli archi di raggio 0-1 – 0-12 e determinare le intersezioni A … M sugli assi s, V r, O. Tracciare la spirale di Archimede, raccordando adeguatamente i punti 0-A-B-C-D-E-F-G-8-H-I-L-M col curvilineo.

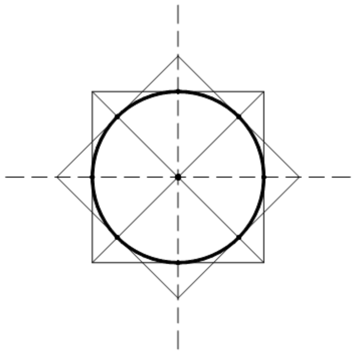


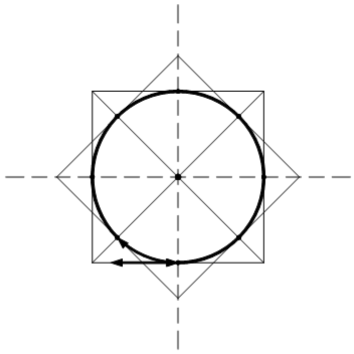
Spirale logaritmica

Tracciare gli assi orizzontale (o), verticale (v) e determinare nell'intersezione il punto 0.
Fissato sull'asse "o" il punto G, tracciare la circonferenza di raggio 0-G. Puntando nelle intersezioni fra la circonferenza e gli assi ortogonali "o" e "v" dividere la circonferenza in 12 parti uguali e tracciare nei punti così determinati gli assi orientati a 30° (t), 60° (s), 120° (r) e 150° (q) rispetto all'orizzontale o. Dal punto 1, intersezione di t con la circonferenza tracciare la perpendicolare e individuare il punto 2 su o. Puntando su 0 tracciare l'arco di raggio 0-2, individuare il punto 3 su t, e il punto F su q. Proseguire con la stessa modalità fino alla determinazione del punto 12 su o.
Dal punto G, tracciare la perpendicolare all'asse o, e individuare il punto H su t. Puntando su 0 tracciare l'arco di raggio 0-H, e individuare il punto 13 su o. Dal punto 13, tracciare la perpendicolare all'asse o, e individuare il punto 14 su t. Puntando su 0 tracciare l'arco di raggio 0-14, individuare il punto 15 su o, e il punto I su s. Proseguire con la stessa modalità fino alla determinazione del punto 21 su o.
Dal punto 21, tracciare la perpendicolare all'asse o, e individuare il punto 22 su t. Puntando su 0 tracciare l'arco di raggio 0-22, individuare il punto P su o.
Unire, raccordando con il curvilinee, i punti: A-B-C-D-E-F-G-H-I-L-M-N-P.

Le spirali sono curve policentriche aperte formate da archi di circonferenza di raggi crescenti raccordati. Alcuni tipi di spirali come quella di Archimede, o la logaritmica sono costruzioni geometriche realizzabili solo attraverso la determinazione di punti debitamente raccordati attraverso l'uso di adeguati curvilinei.

Costruzioni geometriche | Curve cicliche



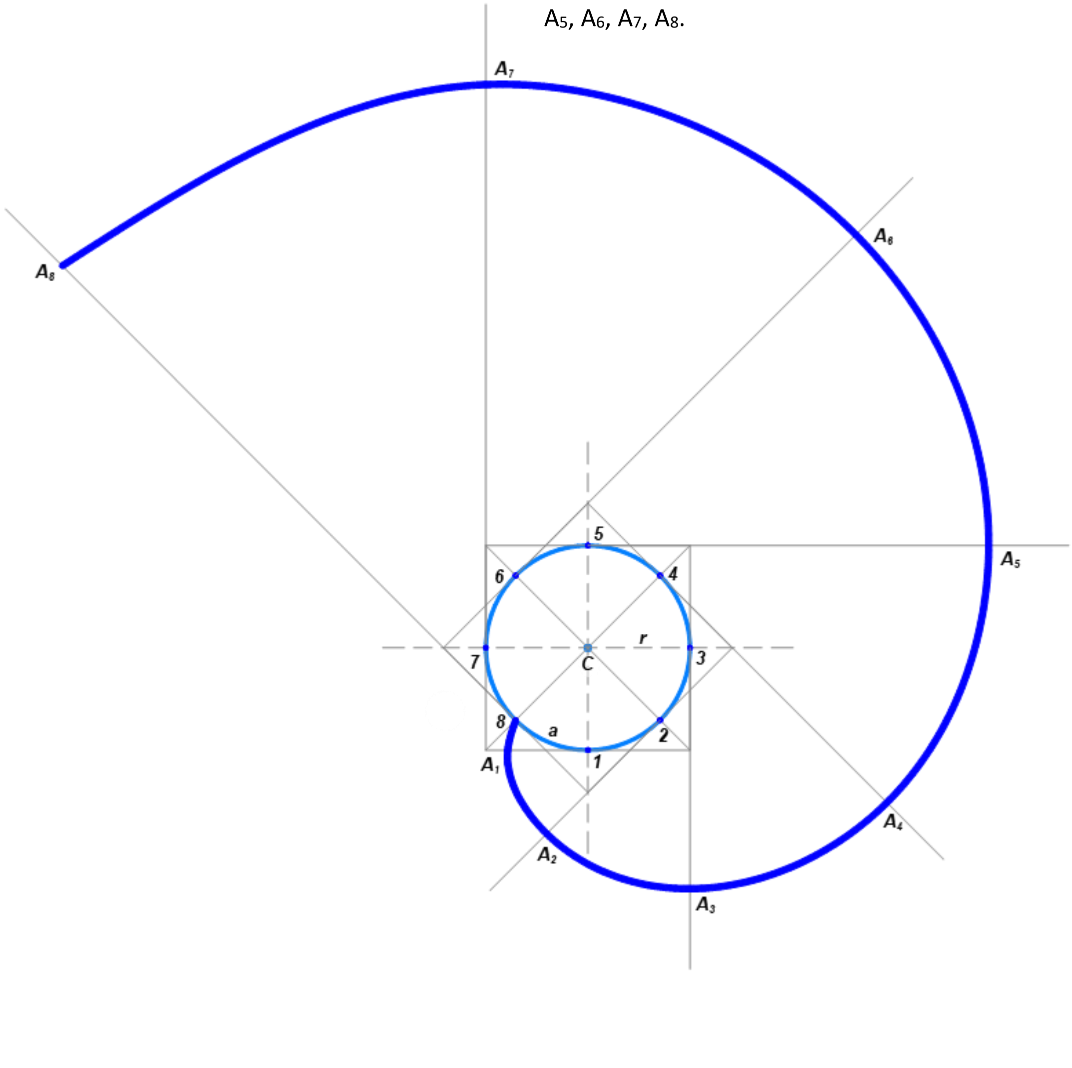


Evolvente

Tracciare la circonferenza deferente di centro C e raggio r. Tracciare l'asse orizzontale passante per C e individuare il diametro 7-3. Tracciare l'asse verticale passante per C e individuare il diametro 1-5. Tracciare il quadrato circoscritto alla circonferenza tangente nei punti 1-3-5-7. Tracciare le diagonali del quadrato individuando i punti 2-4-6-8 sulla circonferenza. Tracciare il quadrato circoscritto alla circonferenza tangente nei punti 2-4-6-8. Calcolare la misura dell'arco di circonferenza (a) utilizzando la formula:

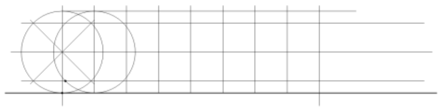
$$a = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot 45°}{360°}$$

pari a 1/8 della circonferenza. Riportare la misura dell'arco a sulla retta tangente alla circonferenza passante per il punto 1 e individuare il punto A_1. Riportare la misura dell'arco 8-2 di lunghezza 2a sulla retta tangente alla circonferenza passante per il punto 2 e individuare il punto A_2 . Con la stessa modalità riportare le misure degli archi 8-3, 8-4, 8-5, 8-6, 8-7, e dell'intera circonferenza sulle tangenti dei rispettivi punti 3, 4, 5, 6, 7, 8, individuando i punti A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8.
Tracciare l'Evolvente unendo i punti 8, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8.



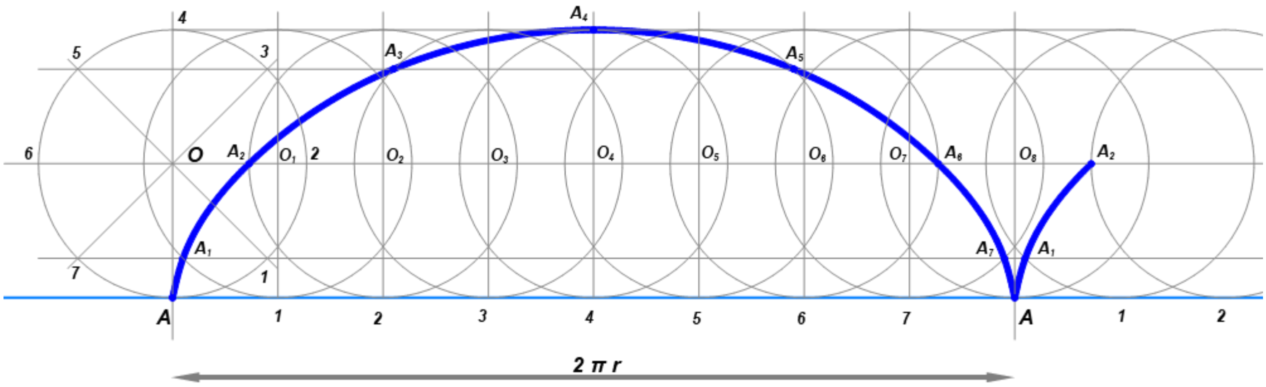
Cicloide ordinaria

Tracciare a piacere la retta deferente. Tracciare la perpendicolare per il punto A sulla la retta deferente Tracciare la parallela alla deferente passante per O sulla perpendicolare. Tracciare la circonferenza di raggio OA e dividerla in 8 parti uguali nei punti: A-1-2-3-4-5-6-7.



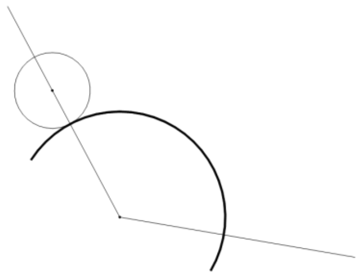
Tracciare i raggi paralleli alla deferente passanti per i punti in cui è divisa la circonferenza: 4 . 5-3 . 6-2 . 7-1. Riportare sulla deferente la distanza AA pari alla misura della circonferenza: 2 π r.

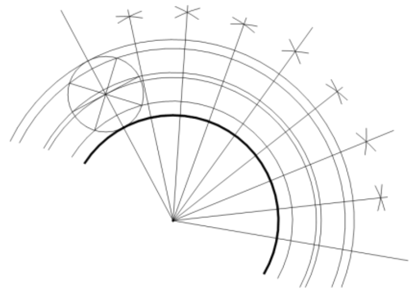
Rappresentare la circonferenza nei punti di contatto con la deferente e determinare sulle corrispondenti quote i punti: A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6 - A_7 . La circonferenza nel punto A chiude la cicloide.



Evolventi e cicloidi, inseriscono nell'ambito delle costruzioni geometriche il concetto di rappresentazione dello spostamento di punti rispetto a enti geometrici definiti (punti, rette, circonferenze).
L'evolvente del cerchio è una curva piana descritta da un punto di una retta, detta generatrice, che ruota senza strisciare lungo una circonferenza, detta deferente.
La cicloide ordinaria è la curva definita da un punto P individuato in un cerchio, che rotola in un piano, senza strisciare, su una retta fissa.
L'epicicloide è la curva generata da un punto di una circonferenza, detta generatrice, che rotola senza strisciare, sulla parte esterna di un'altra circonferenza, detta deferente.
L'ipocicloide è la curva generata da un punto di una circonferenza, detta generatrice, che rotola senza strisciare, sulla parte interna di un'altra circonferenza, detta deferente.

Costruzioni geometriche | Curve cicliche





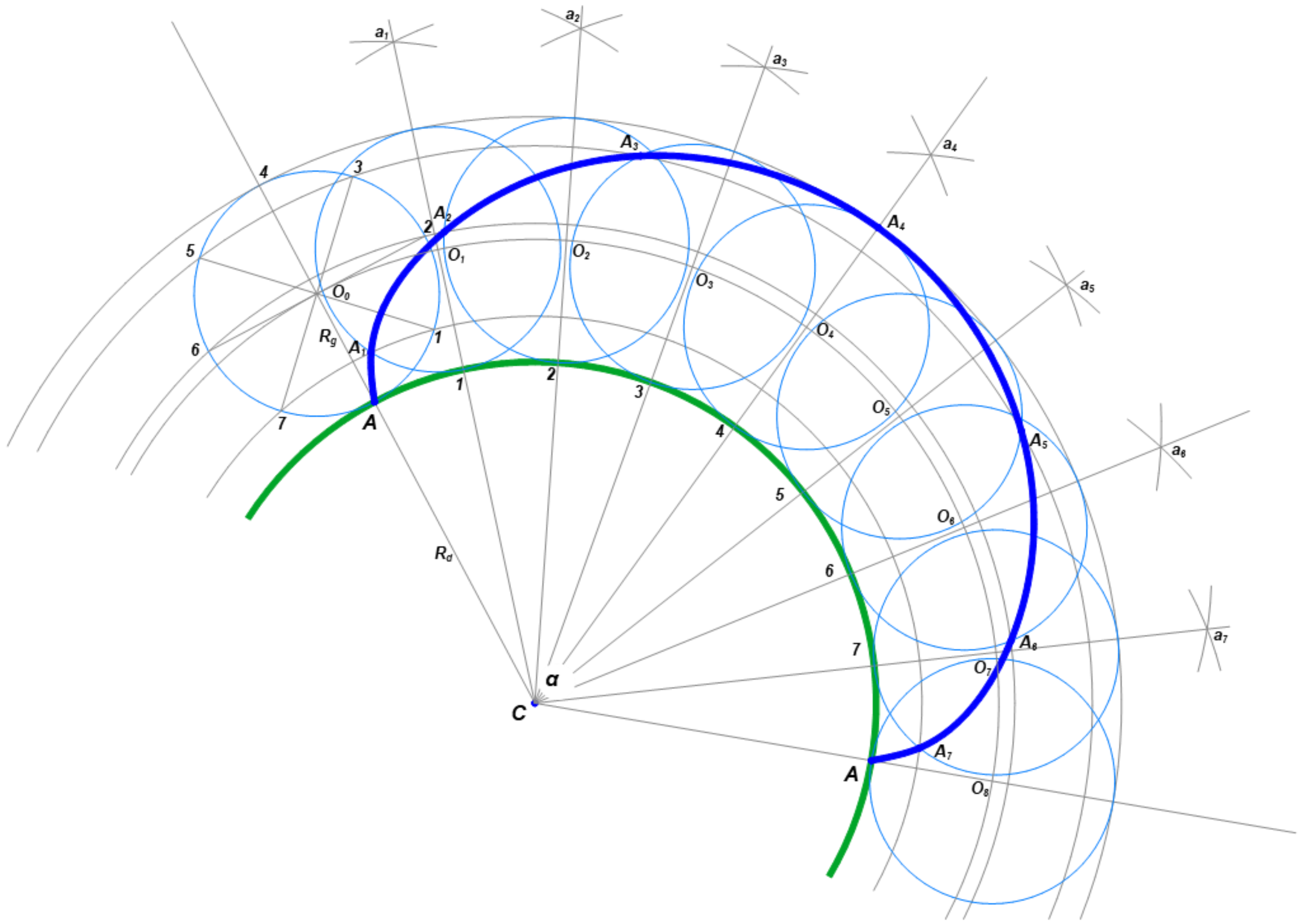
Epicicloide

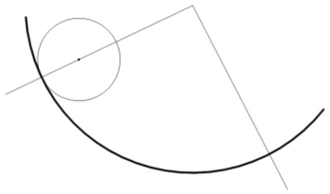
Tracciare la circonferenza deferente di centro C e raggio R_d = AC. Tracciare la retta passante per AC. Impostare la circonferenza generatrice di centro O_0 appartenente al prolungamento di AC e raggio R_g = O_0 A. Individuare sulla deferente l'arco ACA, compreso nell'angolo α, riportando la misura della circonferenza generatrice attraverso la formula:

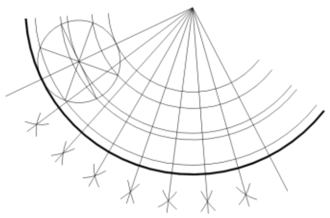
$$AA = \frac{2 \cdot R_g \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$

Dividere l'arco AA in otto parti uguali individuando sulla deferente i punti: 1-2-3-4-5-6-7. Dividere la circonferenza generatrice in otto parti uguali individuando i punti: 2 – 4 – 6, 3 – 7, 1 – 5. Tracciare con centro C gli archi di circonferenza di raggio: C – 7, C – O_0, C – 6, C – 5, C – 4. Riportare la circonferenza generatrice di centro O_1 nell'intersezione fra l'arco di centro C, Raggio = R_g + R_d, e la retta C1. Individuare A_1 nell'intersezione della generatrice con l'arco di raggio C7.

Determinare seguendo lo stesso metodo i punti da A_1 a A_7. Unendo i punti A - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6 A_7 - A si ottiene l'Epicicloide.





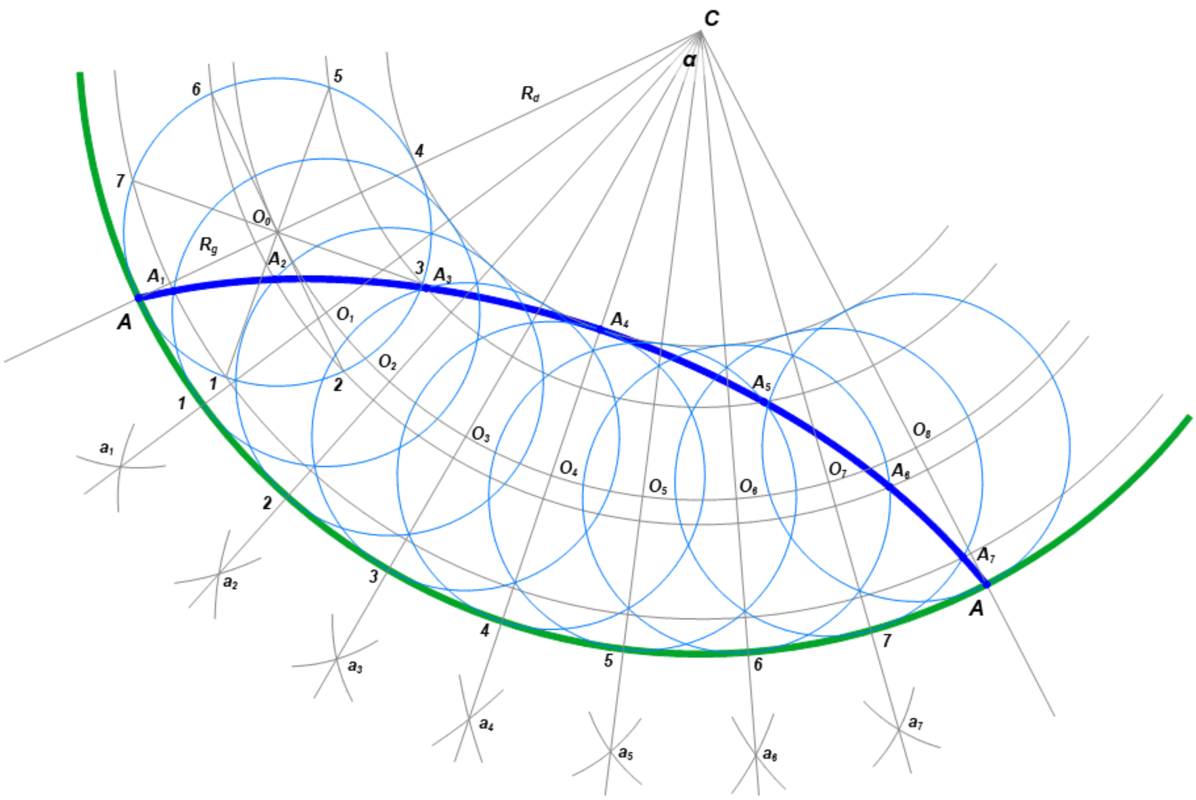


Ipocicloide

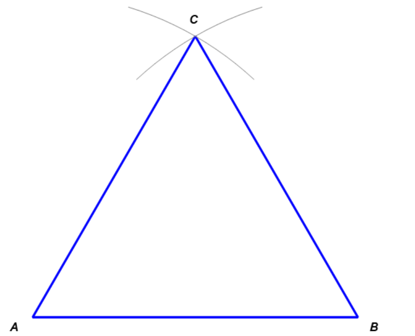
Tracciare la circonferenza deferente di centro C e raggio R_d = AC. Tracciare la retta passante per AC. Impostare la circonferenza generatrice di centro O_0 appartenente a AC e raggio R_g = O_0 A. Individuare sulla deferente l'arco ACA, compreso nell'angolo α, riportando la misura della circonferenza generatrice attraverso la formula:

$$AA = \frac{2 \cdot R_g \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$

Dividere l'arco AA in otto parti uguali individuando sulla deferente i punti: 4, 2, 6, 1, 3, 5, 7. Dividere la circonferenza generatrice in otto parti uguali individuando i punti: 2 – 4 – 6; 3 – 7; 1 – 5. Tracciare con centro C gli archi di circonferenza di raggio: C – 7; C – 6; C – O_0; C – 5; C – 4. Riportare la circonferenza generatrice di centro O_1 nell'intersezione fra l'arco di centro C e Raggio = CO°, e la retta C1. Individuare A_1 nell'intersezione della generatrice con l'arco di raggio C7. Determinare seguendo lo stesso metodo i punti da A_1 a A_7. Unendo i punti A - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6 A_7 - A si ottiene l'Ipocicloide.

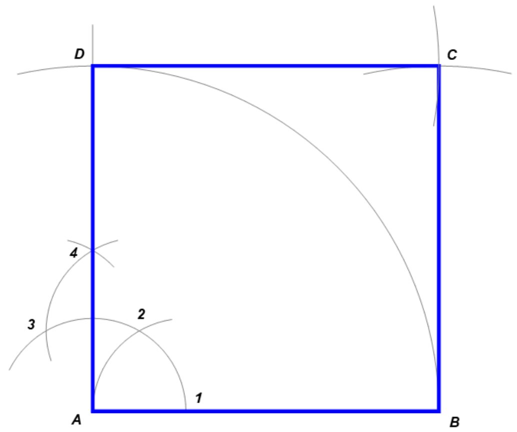


Costruzioni geometriche | Poligoni regolari dato il lato



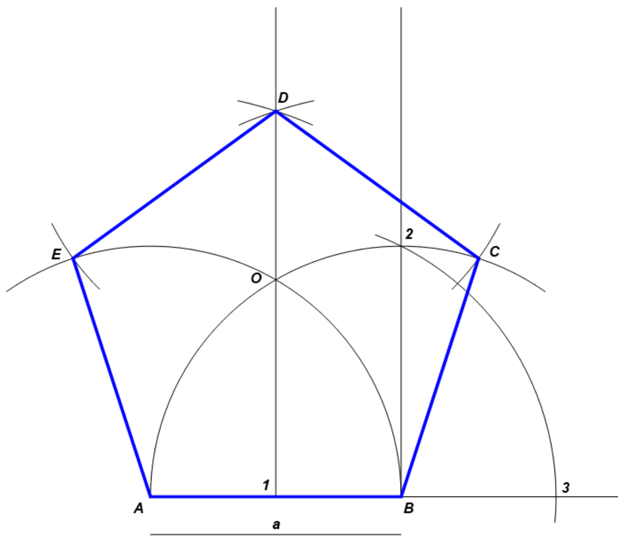
Triangolo

Tracciare il lato AB del triangolo ABC. Puntare prima in A e poi in B con apertura AB e determinare l'intersezione C. Completare la costruzione del triangolo equilatero ABC tracciando BC e CA.



Quadrato

Tracciare il lato AB del quadrato ABCD. Tracciare la perpendicolare ad ab passante per a. Puntare in A e tracciare un arco che interseca AB nel punto 1. Con la stessa apertura puntare nel punto 1 tracciare un arco e individuare 2 sul primo arco. Con la stessa apertura puntare nel punto 2 tracciare un arco e individuare 3 sul primo arco. Sempre con la stessa apertura puntare nel punto 3 tracciare un arco e individuare 4 sul terzo arco. Tracciare la perpendicolare ad AB passante per A-4. Puntare in A con apertura di compasso AB tracciare un arco che individua sulla perpendicolare il punto D. Con apertura di compasso AB tracciare puntando prima in D e poi in B due archi che si intersecano nel punto C.
Tracciare i lati: BC – CD. Ripassare il quadrato ABCD.

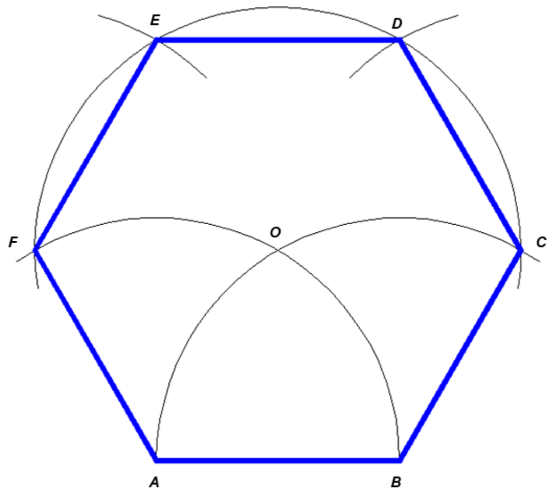


Pentagono

Fissare a piacere la lunghezza a del lato del pentagono. Disegnare il segmento AB uguale al lato a. Facendo centro in A tracciare un arco con apertura di compasso AB. Facendo centro in B tracciare un arco con apertura di compasso AB e individuare O nell'intersezione. Tracciare la perpendicolare per 1, punto medio di AB, passante per O. Tracciare la perpendicolare per B, e determinare 2 nell'intersezione con l'arco. Puntare in 1 e tracciare l'arco di apertura 1-2. Tracciare il prolungamento di AB e determinare 3 nell'intersezione con l'arco. Con apertura A-3 puntare su B e su A, tracciare gli archi e determinare nell'intersezione il punto D. Con apertura di compasso pari ad AB puntare in D e determinare negli archi i punti E e C. Unire i vertici del pentagono: BC, CD, DE, EA.

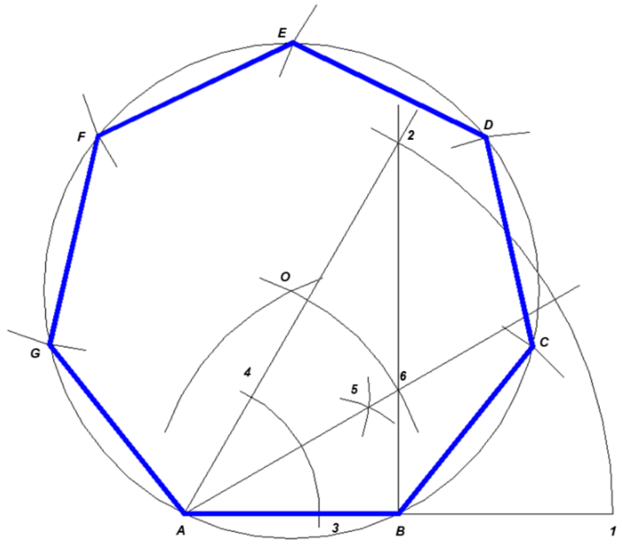
Il poligono è una porzione limitata di piano delimitata da una linea spezzata chiusa. Esso è costituito da: perimetro ovvero la serie di segmenti (lati) che ne delimitano il contorno. I vertici sono i punti in comune a due lati consecutivi. Le diagonali sono segmenti che uniscono vertici non adiacenti.

Costruzioni geometriche | Poligoni regolari dato il lato



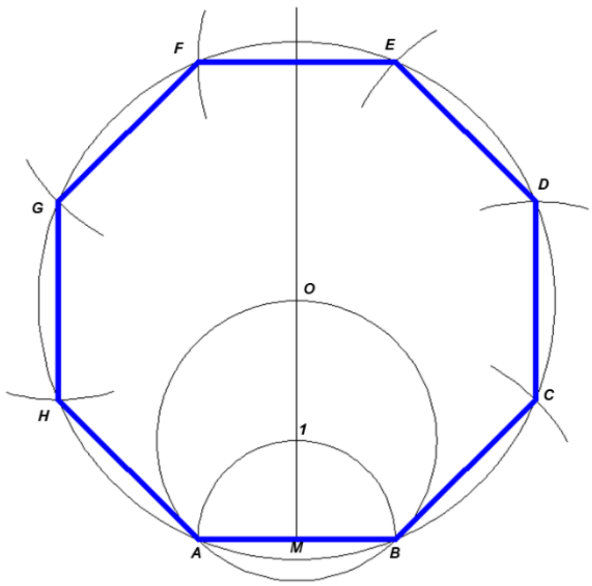
Esagono

Tracciare il lato AB. Centrare negli estremi A e B, e con apertura AB tracciare due archi che si intersecano nel punto O.
Puntare in O e con apertura OA, pari al lato AB, tracciare un arco che interseca gli archi disegnati in precedenza, nei punti F e C. Puntare con la stessa apertura in F e C e determinare D ed E.
Unire i punti A B C D E ed F.



Ettagono

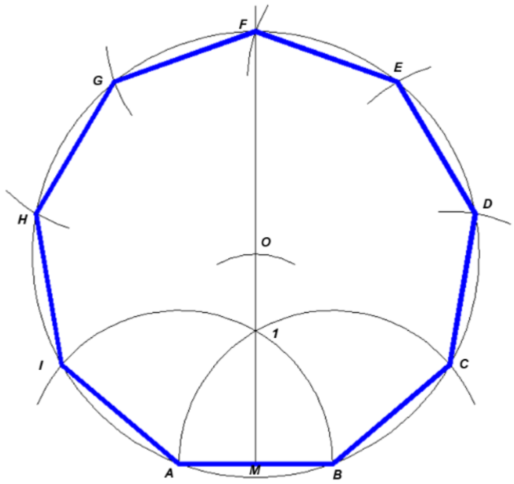
Tracciare il lato AB e sulla stessa retta B1 di uguale lunghezza. Determinare 2 come intersezione fra la perpendicolare per B e l'arco di apertura A1 ottenuto puntando in A.
Dopo aver tracciato A2 costruisci la bisettrice dell'angolo 1A2. che interseca in 6 la perpendicolare innalzata per B. Con apertura A6 centra in A e B e determina O.
Con apertura OA centrare in O tracciare il cerchio che circoscrive l'ettagono. Riportare di seguito sulla circonferenza i punti alla distanza AB. Unire i punti A B C D E F e G.



Ottagono

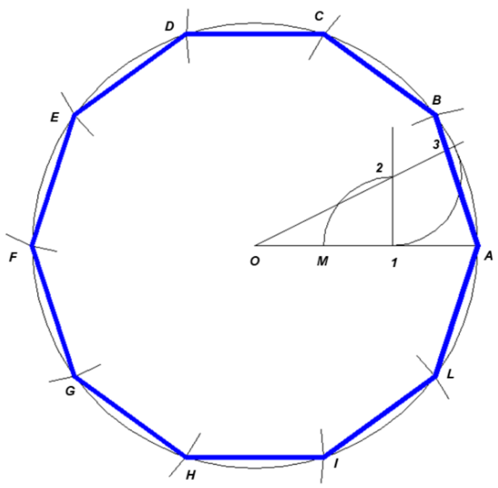
Tracciare il lato AB e la perpendicolare passante per il punto medio M.
Puntando su M tracciare la semicirconferenza di diametro AB che intercetta la perpendicolare nel punto 1. Puntare su 1 con apertura 1A e tracciare il cerchio che intercetta la perpendicolare nel punto O.
Con apertura OA centrare in O e tracciare il cerchio che circoscrive l'ottagono.
Riportare di seguito sulla circonferenza i punti alla distanza AB. Unire i punti A B C D E F G e H.

Costruzioni geometriche | Poligoni regolari dato il lato



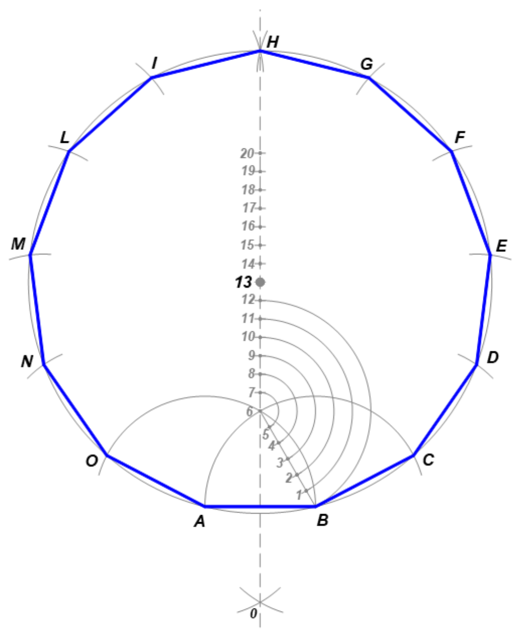
Ennagono

Tracciare il lato AB e la perpendicolare passante per il punto medio M. Centrare negli estremi A e B, e con apertura AB tracciare due archi che intersecano la perpendicolare nel punto 1. Con apertura AM puntare su 1 tracciare l’arco che intercetta la perpendicolare nel punto O. Tracciare con apertura OA il cerchio di centro O che circoscrive l’ennagono. Il cerchio di centro O individua sugli archi di centro A e B i punti rispettivamente I e C. Riportare di seguito sulla circonferenza i punti alla distanza AB. Unire i punti A B C D E F G H e I.



Decagono

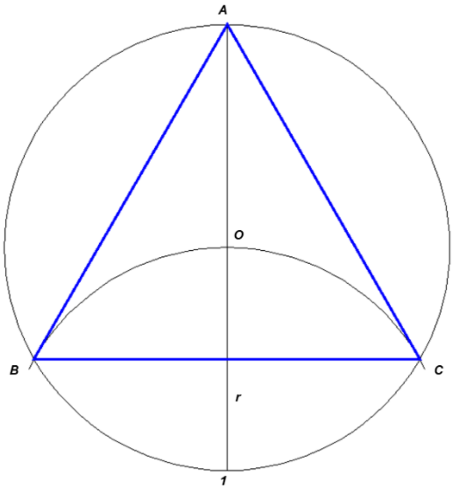
Tracciare il lato O1 pari alla misura del lato dato. Innalza la perpendicolare per 1 e individua 2 come intersezione dell’arco di centro 1 apertura 1M, con M punto medio di O1. Traccia la retta passante per O e 2. Individuare 3 intersezione dell’arco apertura 2-1 e centro 2 con il prolungamento di O2. Tracciare con apertura O3 il cerchio di centro O che circoscrive il decagono. Per una più chiara resa grafica prolungare O1 fino ad intercettare il cerchio individuando il primo punto A del decagono. Riportare di seguito sulla circonferenza, a partire da A, i punti alla distanza O1. Unire i punti A B C D E F G H I ed L.



Poligono con un numero qualsiasi di lati (es. 13)

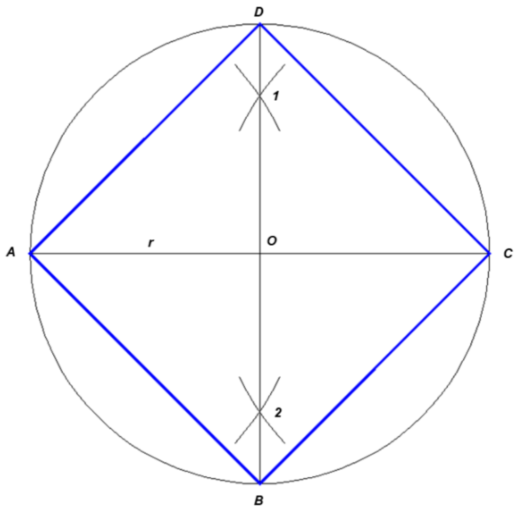
Tracciare il lato AB. Puntare in A e in B con apertura pari ad AB e tracciare due ampi archi che si intersecano nel punto 6 nella parte superiore. Puntare in A e in B con apertura pari ad AB e tracciare due ampi archi che si intersecano nel punto 0 nella parte inferiore. Tracciare l’asse di AB passante per 0-6.
Unire 6 con B e dividerlo in sei parti uguali: B-1-2-3-4-5-6. Puntando il compasso nel punto 6 tracciare gli archi passanti per 5-4-3-2-1-B e individuare nella parte superiore dell’asse i punti 7-8-9-10-11-12.
Riportare sull’asse alla stessa distanza dei precedenti i successivi punti 13-14-15-16-17-18-19-20. Puntare il compasso nel punto 13, centro della circonferenza circoscritta al poligono regolare di 13 lati. Tracciare la circonferenza che interseca gli archi ottenuti puntando su A e B nei punti O e C. Con apertura di compasso AB puntare in C e determinare sulla circonferenza il punto D, E a seguire con la stessa modalità e apertura AB: puntare su D e individuare E, F, G, H, I, L, M, N, O.

Costruzioni geometriche | Divisione della circonferenza-Poligoni inscritti



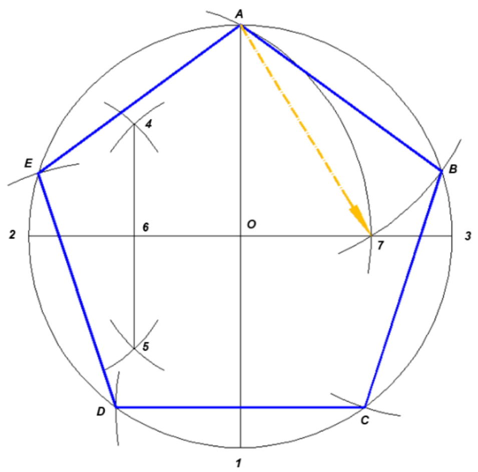
Divisione della circonferenza in 3 parti uguali (Triangolo equilatero inscritto)

Data la circonferenza di centro O e raggio r, tracciare il diametro verticale A1.
Con apertura di compasso uguale a r, puntare in 1 e tracciare un arco che interseca la circonferenza nei punti B e C.
I punti A, B e C che dividono la circonferenza in tre parti uguali, costituiscono i vertici del triangolo equilatero.



Divisione della circonferenza in 4 parti uguali (Quadrato inscritto)

Data la circonferenza di centro O e raggio r, tracciare il diametro orizzontale AC.
Tracciare l'asse del diametro AC e determinare sulla circonferenza i punti B e D.
I punti A, B, C e D che dividono la circonferenza in quattro parti uguali, costituiscono i vertici del quadrato inscritto.

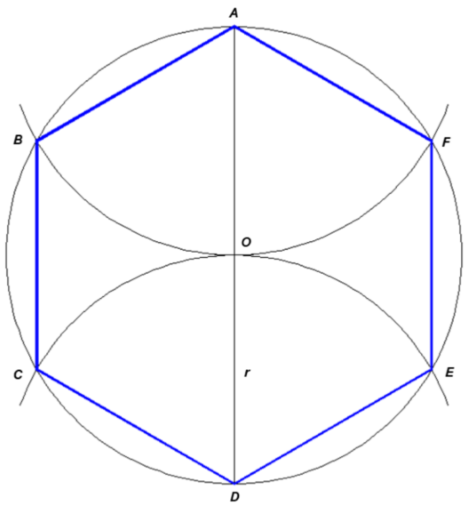


Divisione della circonferenza in 5 parti uguali (Pentagono inscritto)

Data la circonferenza di centro O e raggio r, tracciare i diametri fra loro perpendicolari A-1 e 2-3. Con apertura a piacere, puntare prima su 2 e poi su O, tracciare gli archi che individuano 4 e 5. Il segmento 4-5, asse di 2-O, individua il punto 6. Con apertura di compasso 6-A tracciare l'arco che interseca il diametro 2-3 nel punto 7. Il segmento A-7, riportato sulla circonferenza, è la misura che divide la circonferenza in 5 parti uguali. I punti A-B-C-D-E costituiscono i vertici del pentagono inscritto.

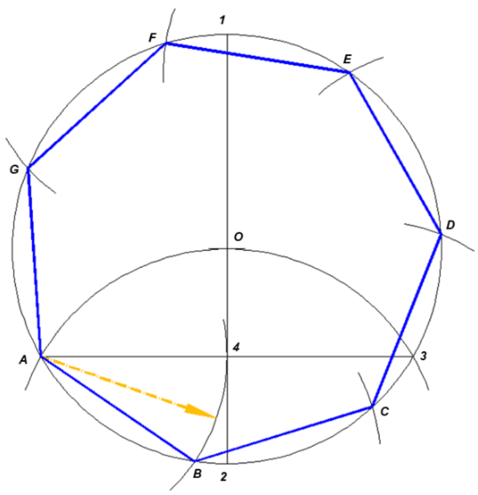
Un poligono regolare può essere inscritto in una circonferenza e in questo caso i vertici del poligono divideranno la circonferenza in parti uguali.

Costruzioni geometriche | Divisione della circonferenza-Poligoni inscritti



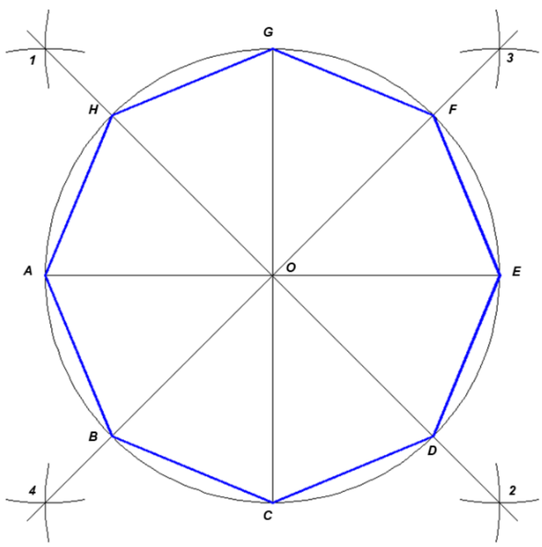
Divisione della circonferenza in 6 parti uguali (Esagono inscritto)

Data la circonferenza di centro O e raggio r, tracciare il diametro verticale AD.
Con apertura di compasso uguale a r, puntare in A e in D e tracciare due archi che intersecano la circonferenza nei punti B, F e C, E.
I punti A-B-C-D-E-F dividono la circonferenza in 6 parti uguali e costituiscono i vertici dell'esagono inscritto.



Divisione della circonferenza in 7 parti uguali (Ettagono inscritto)

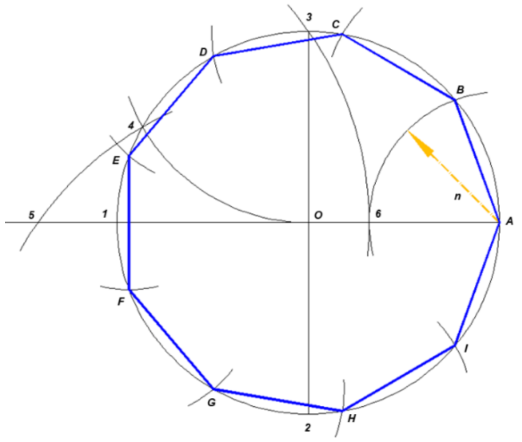
Data la circonferenza di centro O e raggio r, tracciare il diametro verticale 1-2. Con apertura di compasso uguale a r, puntare in 2 e tracciare un arco che interseca la circonferenza nei punti A e 3.
La corda A-3 interseca il diametro 1-2 nel punto 4. Puntando su A tracciare l'arco di raggio A-4 e determinare l'intersezione B sulla circonferenza.
La distanza A-B riportata consecutivamente sulla circonferenza la divide in 7 parti uguali. I punti A-B-C-D-E-F-G costituiscono i vertici dell'ettagono.



Divisione della circonferenza in 8 parti uguali (Ottagono inscritto)

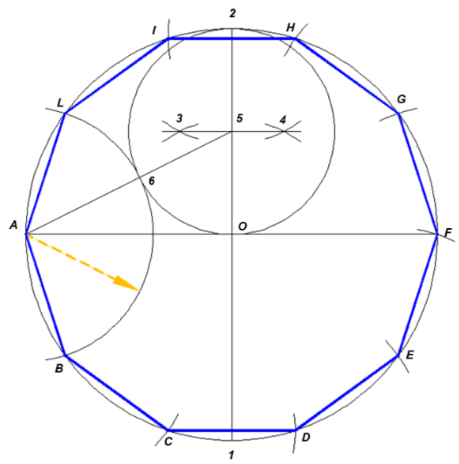
Data la circonferenza di centro O e raggio r, tracciare i diametrI ortogonali fra loro A-E e G-C.
Con apertura di compasso uguale a r, puntare in G, A, C ed E, individuare i punti 1, 2, 3, 4 e tracciare le bisettrici degli angoli retti che intersecano la circonferenza nei punti B, D, F e H.
A, B, C, D, E, F, G e H dividono la circonferenza in 8 parti uguali e costituiscono i vertici dell'ottagono inscritto.

Costruzioni geometriche | Divisione della circonferenza-Poligoni inscritti



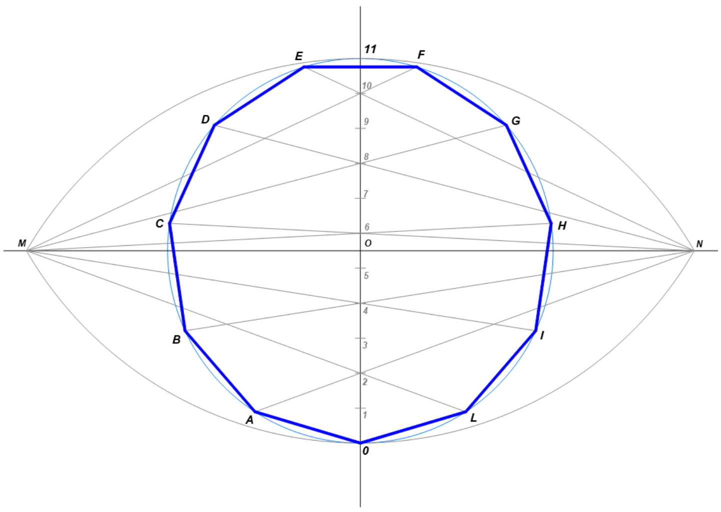
Divisione della circonferenza in 9 parti uguali (Ennagono inscritto)

Data la circonferenza di centro O e raggio r, tracciare i diametri ortogonali fra loro 1-A e 2-3. Tracciare il prolungamento del diametro 1-A.
Successivamente, con apertura di compasso 3-O, puntare in 3 e tracciare l'arco che interseca la circonferenza nel punto 4. Puntando in 2 con apertura di compasso 2-4 tracciare l'arco che interseca il prolungamento del diametro 1-A nel punto 5. Con apertura di compasso 5-3 puntare in 5 e tracciare l'arco che interseca il diametro 1-A nel punto 6.
Il segmento A-6 uguale n riportato successivamente sulla circonferenza, la divide in nove parti uguali. I punti A-B-C-D-E-F-G-H-I costituiscono i vertici dell'ennagono regolare inscritto nella circonferenza.



Divisione della circonferenza in 10 parti uguali (Decagono inscritto)

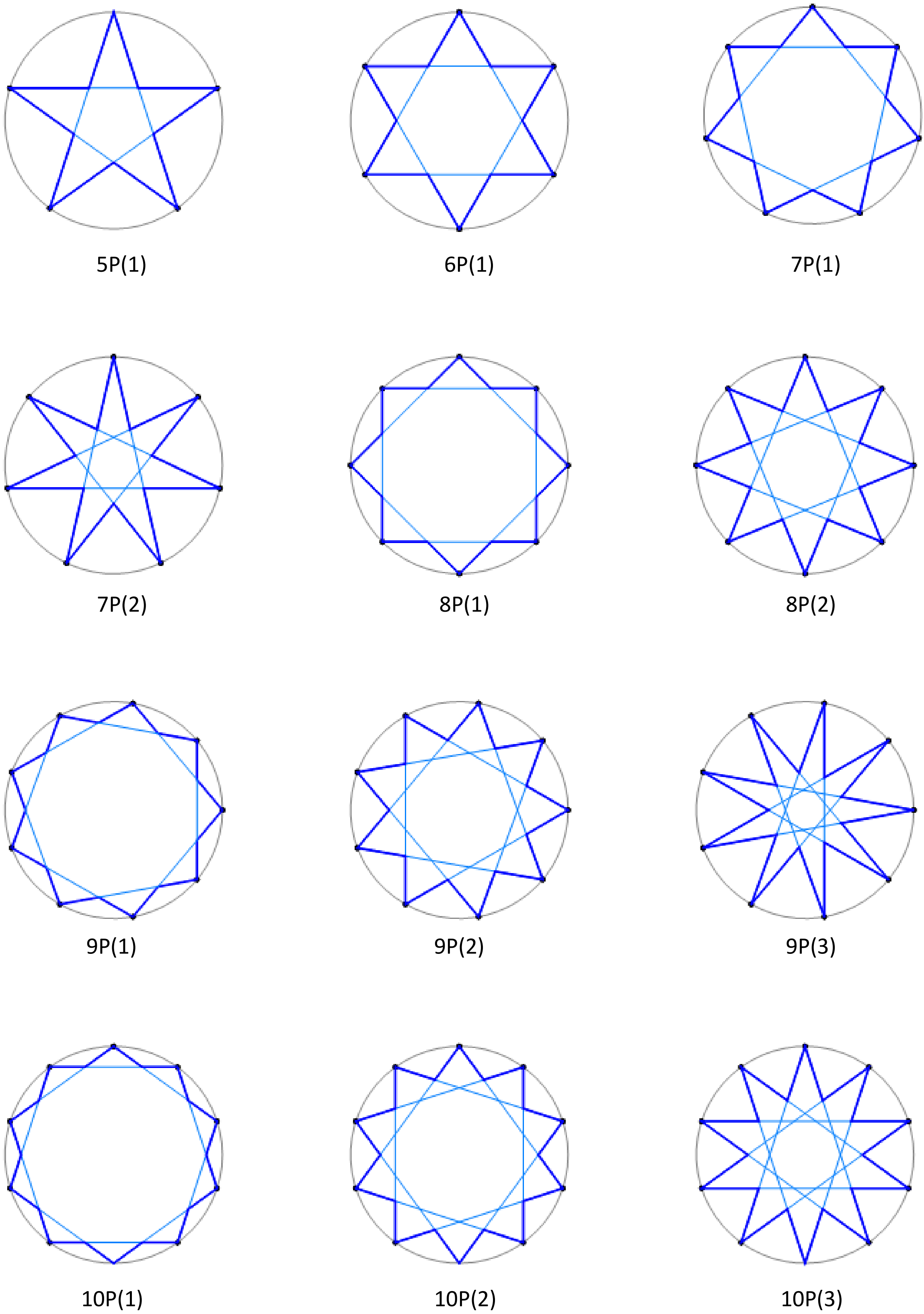
Data la circonferenza di centro O e raggio r, tracciare i diametri ortogonali fra loro A-F e 1-2. Con apertura di compasso a piacere puntare in 2 e O e determinare i punti 3 e 4. La direzione 3-4 intercetta il raggio 2-O nel suo punto medio 5. Puntare in 5 e tracciare il cerchio di raggio 5-O. Il segmento A-5 interseca la circonferenza interna nel punto 6. L'arco di raggio A-6 interseca la circonferenza nei punti B e L.
La distanza A-B, riportata consecutivamente, divide la circonferenza in dieci parti uguali e i punti A-B-C-D-E-F-G-H-I-L costituiscono i vertici del decagono.



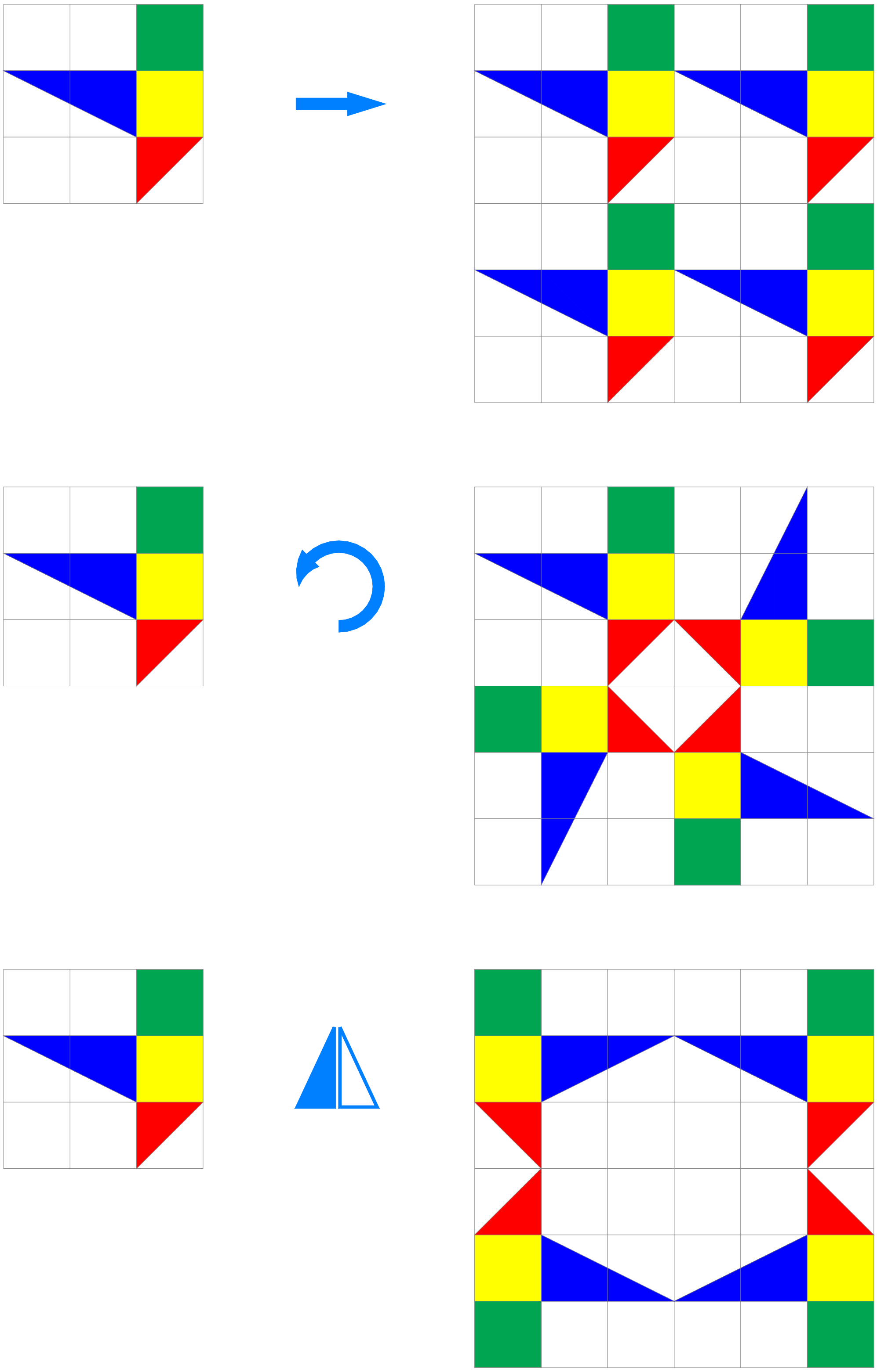
Divisione della circonferenza in "n" parti uguali (esempio: 11 parti)

Tracciare due rette ortogonali e centrando sull'intersezione O, tracciare la circonferenza di diametro 0-11. Dividere il diametro 0-11 in tante parti uguali, quante si intende dividere la circonferenza (es. 11 parti). Puntare su 0 e con apertura 0-11 tracciare l'arco che interseca nei punti M ed N l'asse orizzontale. Puntando su 11 tracciare l'arco di raggio 11-0 e confermare i punti M ed N. Determinare sulla circonferenza le intersezioni con le rette:
N2: A - N4: B - N6: C - N8: D - N10: E - M10: F - M8: G
M6: H - M4: I ed M2: L.
Unire i punti: 0-A-B-C-D-E-F-G-H-I-L, che dividono la circonferenza data in 11 parti uguali.

Costruzioni geometriche | Approfondimenti | Poligoni stellati



Poligoni stellati composti da 5, 6, 7, 8, 9 e 10 punte (P).



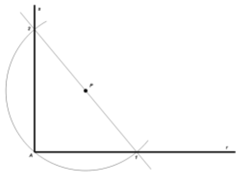
Moduli composti attraverso i sistemi della traslazione, rotazione e riflessione

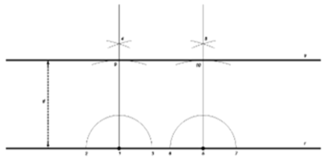
Costruzioni geometriche | Proposte operative

Esempi di riferimento

Esercizio 1
Tracciare la costruzione della perpendicolare ad un estremo del segmento AB, lungo 6 cm, inclinato di 60° rispetto alla retta orizzontale “r” avente in comune con AB il punto A.

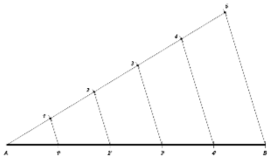
Esercizio 2
Tracciare una retta “s” alla distanza di 5 cm da “r”, inclinata di 20° rispetto alla retta orizzontale “o”.

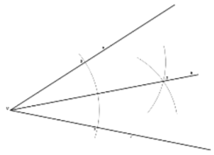




Esercizio 3
Dividi il segmento AB lungo 8 cm in 7 parti uguali

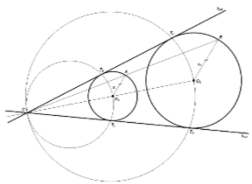
Esercizio 4
Dividi un angolo di 70° in 4 parti uguali

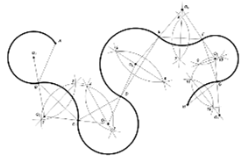




Esercizio 5
Date due circonferenze tangenti rispettivamente di raggio 4 cm e 6 cm, tracciare le tangenti esterne alle due circonferenze.

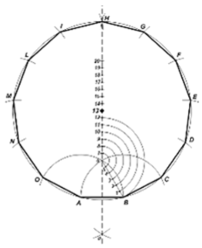
Esercizio 6
A partire da un arco dato raccordare 5 punti genericamente disposti sul piano.

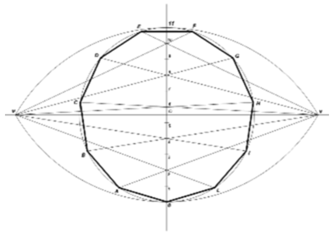




Esercizio 7
Costruire un poligono regolare di 15 lati.

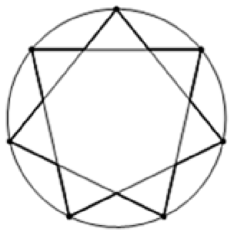
Esercizio 8
Dividere una circonferenza in 13 parti uguali.

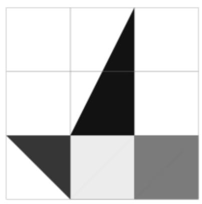




Esercizio 9 Costruire un poligono stellato, a fasce sovrapposte, composto da 7 punte, come da esempio riportato a lato

Esercizio 10
Dopo aver definito una matrice quadrata divisa in 9 parti uguali, imposta all’interno di essa un modulo generatore e realizza successivamente 3 composizioni basate sulla traslazione, rotazione e riflessione.





PROIEZIONI ORTOGONALI

Punti Rette Piani

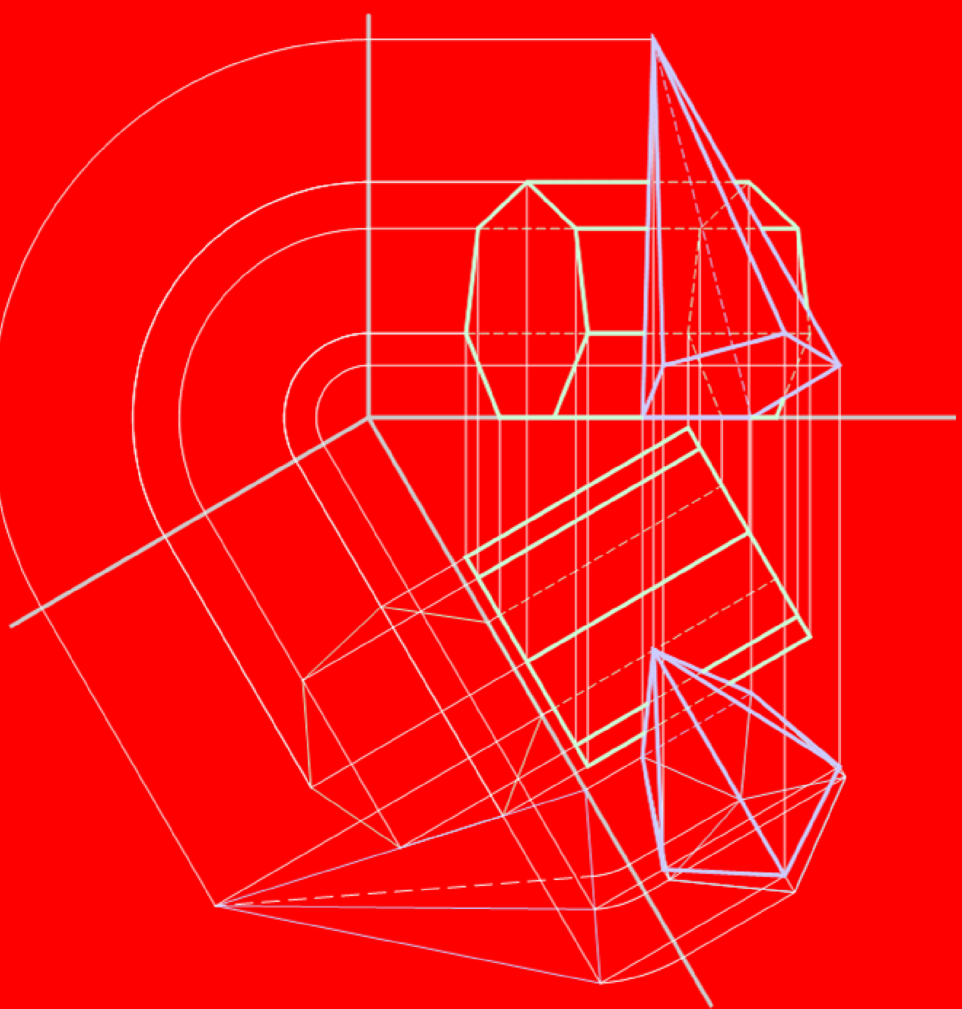
Figure piane

Solidi

Sezioni

Intersezioni e Compenetrazioni

Poliedri regolari



PROIEZIONI ORTOGONALI
Concetti generali

Introduzione

Il fine dei sistemi di rappresentazione grafica è quello di "riportare" in un sistema di ambito bidimensionale la complessità tridimensionale del reale. Ovvero le tre dimensioni dello spazio reale dovranno essere rappresentate e percepite come tali, in un ambito, il foglio, la tela, lo schermo, la parete, che di dimensioni ne possiede due. I sistemi di rappresentazione grafica sopperiscono a questo problema con diverse metodologie proprio per far sì che si possa trasferire le caratteristiche formali di un elemento tridimensionale in un ambiente a due dimensioni. Ciò che caratterizza i sistemi di rappresentazione sono le relazioni di reciproca posizione che si stabiliscono fra tre elementi fondamentali: osservatore, oggetto e quadro. Vediamo di analizzare le caratteristiche di ognuno di questi tre elementi. Dobbiamo immaginare l'osservatore equiparandolo ad un punto e assimilandolo all'occhio umano. È doveroso precisare che quella umana è una vista binoculare, ovvero prodotto di due immagini, una per ciascun occhio, che trovano adeguata sintesi nel nostro sistema visivo e che ci permettono tra l'altro di percepire non solo la vera forma ma anche la profondità, e la distanza dell'oggetto dall'osservatore. Nella geometria descrittiva questo passaggio si semplifica imponendo la coincidenza dell'occhio dell'osservatore (ma da questo momento diremo semplicemente "osservatore") con un punto che a seconda dei contesti è detto osservatore, centro visivo o di visione, centro di proiezione pur restando inalterato il suo significato. L'oggetto, sia esso un punto, un segmento, una figura piana o un solido è ciò che deve essere rappresentato. Il quadro è l'elemento a due dimensioni (piano) nel quale si determinerà la rappresentazione dell'oggetto, "immagine", dal punto di vista dell'osservatore. Il meccanismo attraverso il quale si trasferiscono i dati dell'oggetto sul quadro è detto della "proiezione e sezione". Si ipotizza infatti che dal punto di vista dell'osservatore si dirigano una serie di raggi detti "proiettanti" che attraversando l'oggetto nei suoi punti notevoli (estremi, vertici, spigoli) vengono sezionati dal quadro determinando nella sua superficie l'immagine dell'oggetto. Si comprende a questo punto che la principale differenza fra i metodi di rappresentazione grafica è data dalla posizione dell'osservatore. Se la distanza dell'osservatore dal quadro è finita, ovvero misurabile, i raggi proiettanti saranno convergenti nel punto dell'osservatore e si parlerà di proiezione conica o prospettiva. Si rileva facilmente che i raggi proiettanti convergenti in una condizione di distanza finita fra osservatore e quadro tendono alla condizione di parallelismo quanto più questa distanza aumenta, tanto che è possibile affermare che se si ipotizza la posizione dell'osservatore a una distanza infinita rispetto al quadro, i raggi proiettanti risulteranno fra loro paralleli. In questo caso si parlerà di proiezioni parallele o cilindriche. Inoltre se i raggi proiettanti provenienti dall'infinito e perciò paralleli fra loro attraversano il quadro ortogonalmente si parlerà di proiezione ortogonale. Date le condizioni proiettive fortemente condizionate dall'astrattezza della posizione dell'osservatore, è abbastanza improbabile una corrispondenza univoca fra l'oggetto e una sua eventuale unica immagine. È opportuno quindi realizzare almeno una doppia, o tripla proiezione su piani fra loro ortogonali (proiezioni di Monge) in modo tale che le immagini si presentino in condizione di corrispondenza biunivoca con l'oggetto, ovvero che sia possibile risalire alla vera forma dell'oggetto partendo dalle immagini e viceversa dall'oggetto alle immagini. Il metodo particolarmente adatto a rappresentare oggetti tridimensionali in ambito progettuale, ovvero nella previsione grafica di un elemento che deve essere realizzato o nel rilievo per rappresentare oggetti esistenti. Sarà tuttavia necessario saper leggere i disegni interpretandone la corrispondenza con la realtà nella consapevolezza certa del metodo e delle regole utilizzati per creare le immagini. Il disegno tecnico è prima di tutto un linguaggio caratterizzato da una importante funzione comunicativa, analizzarne le regole, i procedimenti esecutivi, e le linee teoriche che ad esse sottendono, rientrano fra le finalità di questo libro. Il sistema delle proiezioni ortogonali prevede oltre la coppia di piani ortogonali orizzontale, detto primo piano di proiezione e verticale detto secondo piano di proiezione, intersecantisi in una retta orizzontale detta linea di terra (LT). Spesso ma non necessariamente si aggiunge un terzo piano in posizione ortogonale rispetto ai piani orizzontale e verticale, detto laterale o terzo piano di proiezione che contribuisce a determinare in modo univoco l'immagine dell'oggetto sul quadro.

Punti Rette Piani

L'immagine di un punto generico sul PO, primo piano di proiezione, sarà data dall'intersezione di un raggio ortogonale ad esso passante per il punto. E nello stesso modo si procederà per quanto riguarda il PV e il PL. La distanza della prima proiezione del punto dalla LT si chiama aggetto e indica la distanza del punto dal PV, presa ortogonalmente. La distanza della seconda proiezione del punto dalla LT si chiama quota o altezza e definisce la distanza del punto dal PO, sempre misurata ortogonalmente rispetto al piano. I punti coincidenti con il piano orizzontale hanno la quota pari a zero mentre i punti appartenenti al piano verticale hanno l'aggetto pari a zero. I punti appartenenti alla linea di terra, retta comune al PO e al PV, hanno sia la quota che l'aggetto pari a zero. Proiettare una retta in doppia proiezione significa rappresentare ogni suo punto in modo tale che ad ogni punto della retta corrisponda uno ed un solo punto della sua proiezione. Una retta generica è individuata nelle proiezioni ortogonali, dalle sue due intersezioni con i piani di proiezione dette tracce unite alla proiezione di un altro punto della retta determinato nello stesso piano di proiezione. Si unirà sul PO la prima traccia con la prima proiezione della seconda traccia. Un piano è un elemento a due dimensioni individuato: da tre punti, due punti e una retta, da due rette parallele, da due rette incidenti. Così come per la retta, gli elementi caratterizzanti l'immagine del piano sul quadro sono le tracce. Fra le infinite posizioni del piano rappresentabili in una doppia proiezione, possiamo individuarne alcune di particolare interesse che spesso ritroveremo nei vari esempi trattati. Il piano in posizione generica presenta due tracce inclinate su PO e PV, e coincidenti in un punto della linea di terra.

Parallelismo e Ortogonalità

Data una doppia proiezione una retta può trovarsi nella condizione di parallelismo rispetto al piano di proiezione. Se parallela al PO e inclinata rispetto al PV, avrà la seconda traccia in un punto proprio e la prima in un punto improprio (distanza infinita). Nel caso in cui il parallelismo della retta si presentasse rispetto al PV e l'inclinazione rispetto al PO, avremo la prima traccia in un punto proprio e la seconda all'infinito in un punto improprio. Le rette parallele sia al PO che al PV non avranno tracce proprie, e la proiezione parallela alla linea di terra, potrà essere realizzata solo se noti sia la quota che l'aggetto di un suo punto. Il piano parallelo al PO si proietterà con la sola seconda traccia parallela alla linea di terra, mentre il piano parallelo al PV sarà determinato dalla sola prima traccia anch'essa parallela alla linea di terra (LT). Due piani sono fra loro paralleli se sono parallele le rispettive tracce dei piani. La proiezione di una retta ortogonale al quadro, coinciderà con la traccia poiché tutti i raggi proiettanti passanti per i suoi punti saranno coincidenti con la retta e le loro proiezioni di conseguenza con la traccia. I punti della retta ortogonale al quadro saranno inseriti con il segno di coincidenza nell'ordine che dall'osservatore si proietta verso il quadro. Una retta si troverà nella condizione di ortogonalità rispetto ad un piano generico se le sue immagini saranno ortogonali alle rispettive tracce del piano. I piani ortogonali al PO e inclinati rispetto al PV avranno la prima traccia inclinata rispetto alla LT e la seconda traccia ortogonale rispetto alla LT. Al contrario un piano ortogonale al PV e inclinato rispetto al PO avrà la prima traccia ortogonale alla linea di terra e la seconda inclinata rispetto alla linea di terra. I piani ortogonali sia al PO che al PV avranno le tracce allineate entrambe ortogonali alla linea di terra. Contrariamente a quanto si potrebbe pensare l'ortogonalità fra due piani non è data necessariamente dalla condizione di ortogonalità delle rispettive tracce. Possiamo invece affermare che due piani sono fra loro ortogonali se un piano passa per una retta ortogonale all'altro piano, oppure se il primo piano è ortogonale ad una retta appartenente al secondo piano.

Appartenenza

Nella risoluzione dei problemi proposti è spesso necessario stabilire i criteri in base ai quali è possibile stabilire le condizioni di appartenenza degli elementi fra loro. Un punto appartiene ad una retta se le proiezioni del punto appartengono alle rispettive proiezioni della retta, ovvero la prima proiezione del punto apparterrà alla prima proiezione della retta e la seconda proiezione del punto alla seconda proiezione della retta. Una retta appartiene ad un piano se le sue tracce appartengono alle rispettive tracce del piano. Conseguenza di questi primi due enunciati è che un punto appartiene ad un piano se appartiene ad una retta appartenente anch'essa al piano.

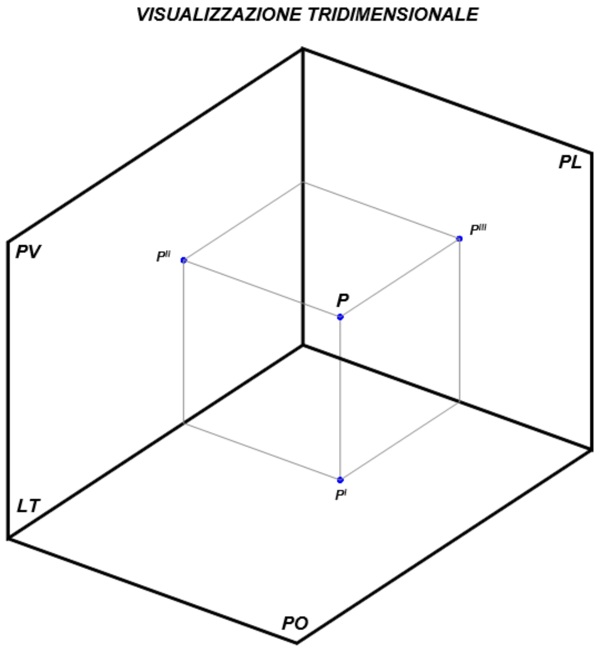
Piani ausiliari

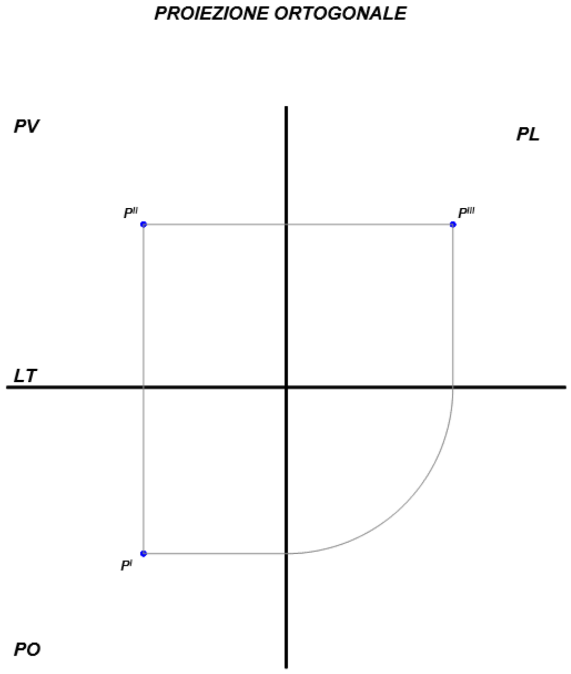
È possibile rappresentare le figure piane, ad esempio i poligoni, solo se questi si trovano in condizioni di parallelismo rispetto al piano di proiezione. In queste condizioni proiettive l'immagine manterrà la vera forma dell'oggetto reale. Nei casi in cui gli oggetti non dovessero presentare alcun elemento parallelo al quadro, si farà ricorso all'utilizzo di piani definiti non a caso ausiliari, che opportunamente individuati e ribaltati, determineranno le condizioni di parallelismo da cui partire per risolvere alcuni particolari problemi proiettivi. In particolare, si sfrutteranno le seguenti proprietà del ribaltamento dei piani. I piani ruotano intorno ad un asse detto cerniera, i cui punti si considerano fissi. Tutti i punti del piano ruotano mantenendo inalterata la distanza dalla cerniera e descrivendo archi che hanno il centro nella cerniera. Infine, gli archi di rotazione appartengono a piani ortogonali alla cerniera. Applicando queste quattro regole è possibile risolvere diverse tipologie di esercizi proiettivi come, ad esempio, i solidi con asse inclinato o appoggiati a piani inclinati.

Sezioni, Compenetrazioni e Sviluppo di solidi

Gli oggetti possono essere sezionati da piani secanti posti in varie posizioni rispetto al quadro e all'oggetto stesso. Oltre alla rappresentazione dell'oggetto sezionato è importante determinare, attraverso l'utilizzo di piani ausiliari, la vera forma della superficie di sezione quando questa non si trova in condizione di parallelismo rispetto al quadro. Completano gli argomenti trattati, la compenetrazione fra solidi e la rappresentazione dello sviluppo, ovvero della vera forma della superficie esterna dell'oggetto a partire dai poliedri regolari.

Proiezioni ortogonali | Punti

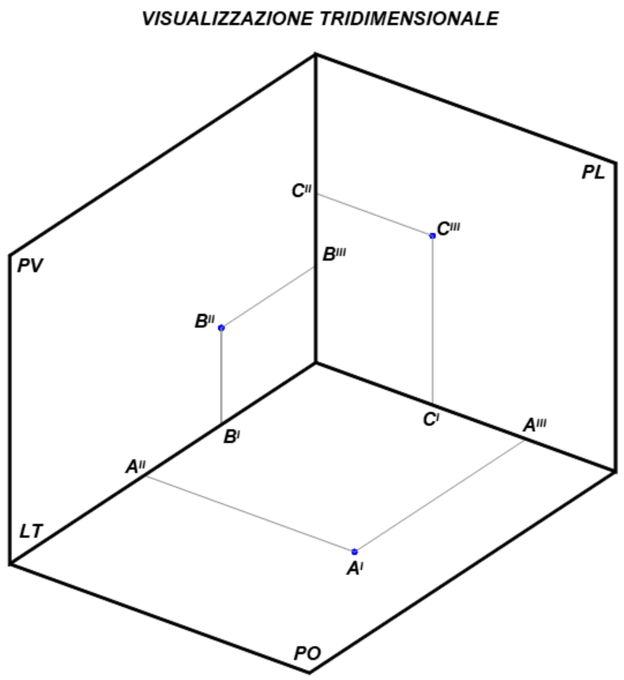


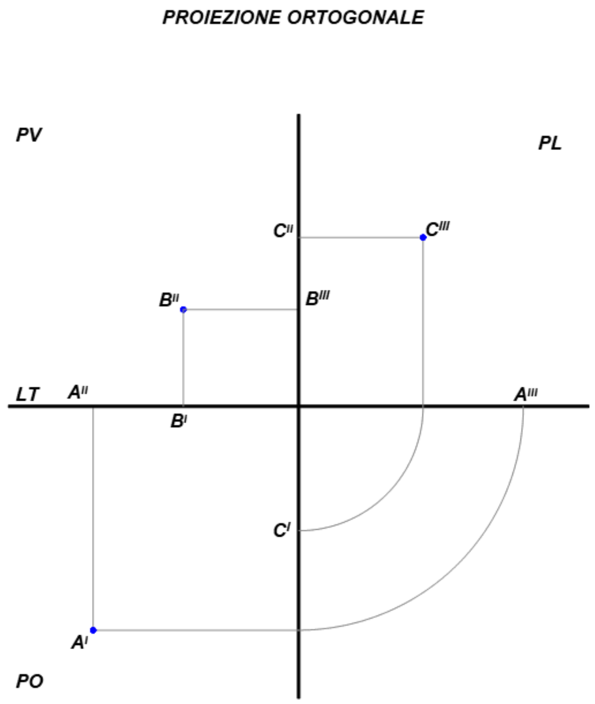


Proiezione ortogonale di un punto generico

Il metodo delle proiezioni ortogonali di Monge prevede che gli elementi siano rappresentati sullo stesso piano ribaltando opportunamente i piani principali. In particolare il piano orizzontale si dispone parallelamente al piano verticale ruotando rispetto alla linea di terra. Allo stesso modo il piano laterale si dispone in condizione di parallelismo rispetto al piano verticale, ruotando di 90° rispetto alla traccia intersezione fra i due piani verticale e laterale. Il punto P posto in posizione generica rispetto ai piani principali, fra loro ortogonali, viene proiettato ortogonalmente sul piano orizzontale. Si ipotizza un raggio proiettante avente origine in O posizione dell'osservatore posto a distanza infinita, e passante per il punto P. L'intersezione fra il raggio proiettante e il PO determina P^{I}, prima proiezione del punto P, detta anche *immagine* del punto P. La distanza di P^{I} dalla linea di terra LT, uguale a PP^{II}, si chiama aggetto.
Si proietta sul piano verticale il punto P con direzione ortogonale rispetto al quadro determinando la seconda proiezione P^{II} immagine del punto P sul Piano Verticale. Notiamo che il raggio proiettante PP^{II} nello spazio tridimensionale, si visualizza sul piano orizzontale mentre PP^{I} raggio proiettante di P sul piano orizzontale, si visualizza sul piano verticale. Le proiezioni hanno in comune l'intersezione con la linea di terra e pur essendo due elementi distinti risultano, nelle proiezioni di Monge, allineati sulla stessa retta. L'esecuzione grafica accomuna i due raggi che vengono spesso erroneamente considerati espressione di un'unica proiezione.
Lo stesso dicasi per la proiezione sul piano laterale ottenuta attraverso l'intersezione con il terzo piano di proiezione di un raggio ortogonale ad esso passante per il punto P. In questo caso l'aggetto del punto, ovvero la sua distanza dal piano verticale, viene riportata con il compasso facendo centro sull'origine dei piani di proiezione e successivamente tracciando la verticale per il punto di intersezione dell'arco con la linea di terra. Si riporta quindi con un'unica direzione orizzontale la quota della proiezione P^{II} considerando che tale distanza $P^{II}P^{III}$ rappresenta anch'essa due elementi distinti: la distanza di P dal piano laterale e a seguire lungo la stessa direzione la distanza di P dal piano verticale.

Proiezioni ortogonali | Punti





Proiezione ortogonale di punti appartenenti ai piani principali

Proiezione del punto A coincidente con il piano orizzontale

Il caso particolare di punti coincidenti con i piani di proiezione, determina alcune interessanti varianti rispetto alla proiezione del punto generico. Se il punto coincide con il piano orizzontale, il punto reale A coincide con la sua prima proiezione A^{I}, avrà la quota uguale a zero e le proiezioni sul piano verticale e laterale si troveranno sulla linea di terra.

Proiezione del punto B coincidente con il piano verticale

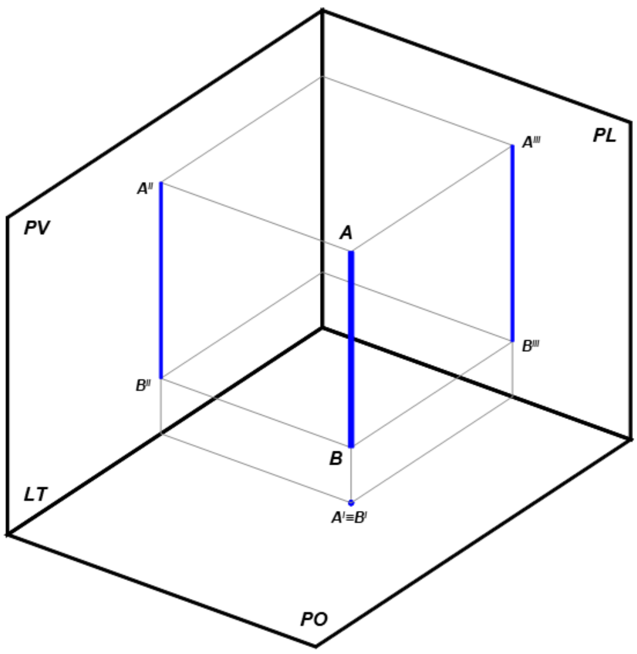
Quando si verifica la condizione di appartenenza di un punto con il piano verticale, il punto reale, in questo caso B coincide con la sua prima proiezione B^{II}. L'immagine avrà l'aggetto uguale a zero, la proiezione sul piano orizzontale sulla linea di terra, mentre la terza proiezione sul piano laterale si troverà sulla traccia intersezione del piano laterale con il piano verticale.

Proiezione del punto C coincidente con il piano laterale

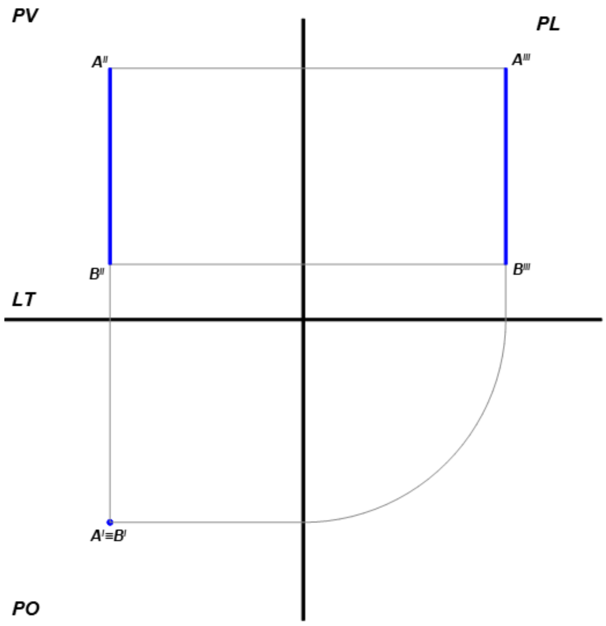
Se il punto coincide con il piano verticale, il punto reale C coincide con la sua terza proiezione C^{III} e le proiezioni sul piano orizzontale e sul piano verticale si troveranno entrambe sull'asse traccia del piano laterale.

Proiezioni ortogonali | Segmenti

VISUALIZZAZIONE TRIDIMENSIONALE



PROIEZIONE ORTOGONALE

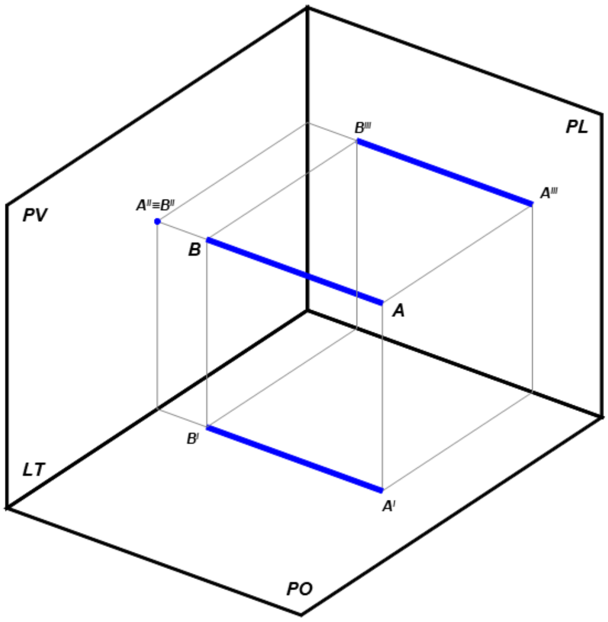


Proiezione ortogonale di un segmento ortogonale al piano orizzontale

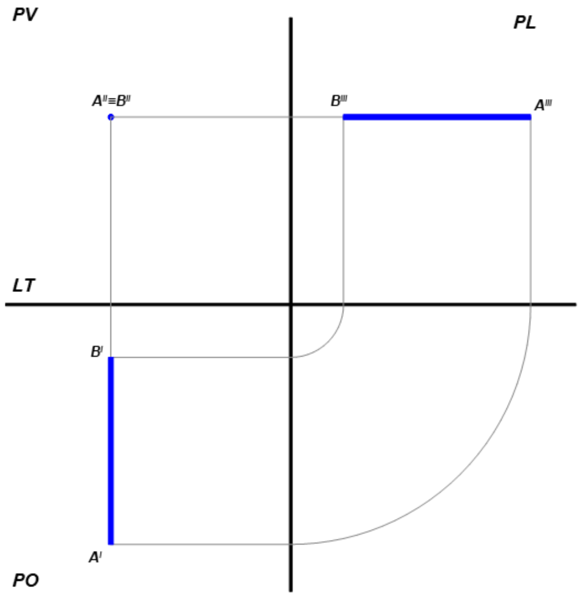
La proiezione sul piano orizzontale:
Proiettare un segmento significa proiettare e unire l'immagine dei suoi estremi. Il segmento AB si presenta in posizione ortogonale rispetto al piano orizzontale. Il raggio proiettante ortogonale al piano orizzontale passa per entrambi i suoi estremi A e B, le cui proiezioni coincideranno nello stesso punto $A^{I}\equiv B^{I}$. La nomenclatura in particolare indica che il raggio proiettante incontra, nel suo percorso dall'osservatore al quadro, prima il punto A e successivamente il punto B. La distanza della proiezione $A^{I}\equiv B^{I}$ dalla linea di terra, l'aggetto, indica distanza del segmento AB dal piano verticale, mentre la distanza dall'asse indica la distanza dal piano laterale.
La proiezione sul piano verticale:
I raggi ortogonali al piano verticale proiettano A e B determinando l'immagine A^{II} B^{II}. Poiché AB è ortogonale al piano orizzontale, questi si trova in condizione di parallelismo rispetto ai piani verticale e laterale. Infatti data la medesima distanza di A e B dal piano verticale, si dimostra facilmente che il quadrilatero $ABB^{II}A^{II}$ è un rettangolo in cui i lati opposti AB e A^{II} B^{II} sono uguali. La condizione di parallelismo è la sola che consente la rappresentazione in vera lunghezza dei segmenti.
La proiezione sul piano laterale:
La proiezione sul piano laterale segue gli stessi principi della proiezione sul piano verticale. Anche in questo caso il segmento si trova in condizione di parallelismo rispetto al piano e di conseguenza la sua immagine manterrà inalterata la lunghezza del segmento AB e l'ortogonalità rispetto alla linea di terra.

Proiezioni ortogonali | Segmenti

VISUALIZZAZIONE TRIDIMENSIONALE



PROIEZIONE ORTOGONALE



Proiezione ortogonale di un segmento ortogonale al piano verticale

La proiezione sul piano orizzontale:

I raggi ortogonali al piano orizzontale proiettano A e B determinando l'immagine A^I B^I. Poiché AB è ortogonale al piano verticale, questi si trova in condizione di parallelismo rispetto ai piani orizzontale e laterale. Infatti data la medesima distanza di A e B dal piano orizzontale, si dimostra facilmente che il quadrilatero ABB^IA^I, analogamente all'esempio trattato in precedenza, è un rettangolo in cui i lati opposti AB e A^I B^I sono uguali. La condizione di parallelismo fra AB e il piano orizzontale consente la rappresentazione in vera lunghezza del segmento.

La proiezione sul piano verticale:

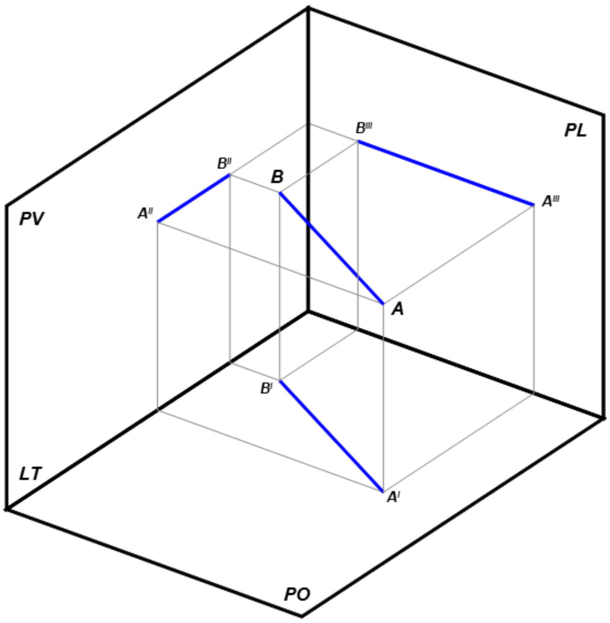
Il segmento AB si presenta in posizione ortogonale rispetto al piano verticale. Il raggio proiettante, in questo caso ortogonale al piano verticale, passa per entrambi i suoi estremi A e B, le cui proiezioni coincideranno nello stesso punto $A^{II}\equiv B^{II}$. La nomenclatura analogamente a quanto evidenziato nel caso di ortogonalità rispetto al piano orizzontale, indica che il raggio proiettante incontra, nel suo percorso dall'osservatore al quadro, prima il punto A e successivamente il punto B. La distanza della proiezione $A^{II}\equiv B^{II}$ dalla linea di terra, la quota, indica la distanza del segmento AB dal piano orizzontale.

La proiezione sul piano laterale:

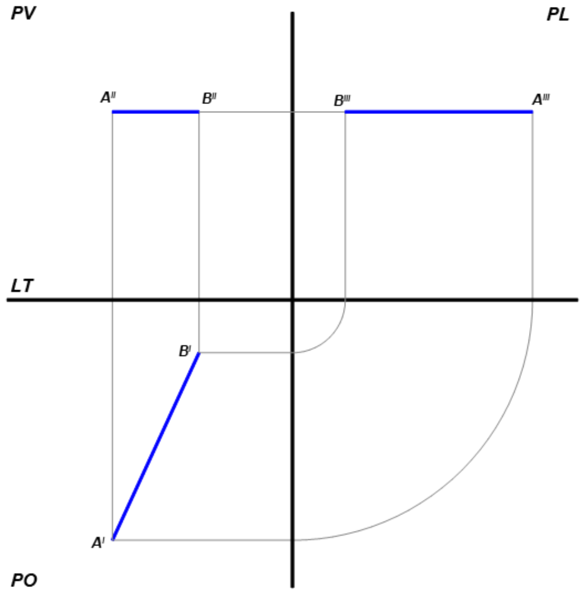
La proiezione sul piano laterale segue gli stessi principi della proiezione sul piano orizzontale. Anche in questo caso il segmento si trova in condizione di parallelismo rispetto al piano e di conseguenza la sua immagine manterrà inalterata la lunghezza del segmento AB e l'ortogonalità rispetto all'asse.

Proiezioni ortogonali | Segmenti

VISUALIZZAZIONE TRIDIMENSIONALE



PROIEZIONE ORTOGONALE



Proiezione ortogonale di un segmento parallelo al piano orizzontale e inclinato rispetto ai piani verticale e laterale

La proiezione sul piano orizzontale:

Il segmento AB si trova in condizione di parallelismo rispetto al piano orizzontale dove si proietterà con la sua misura oggettiva. La retta d'appartenenza della proiezione A^I B^I del segmento AB determina sulla linea di terra un angolo generico.

La proiezione sul piano verticale:

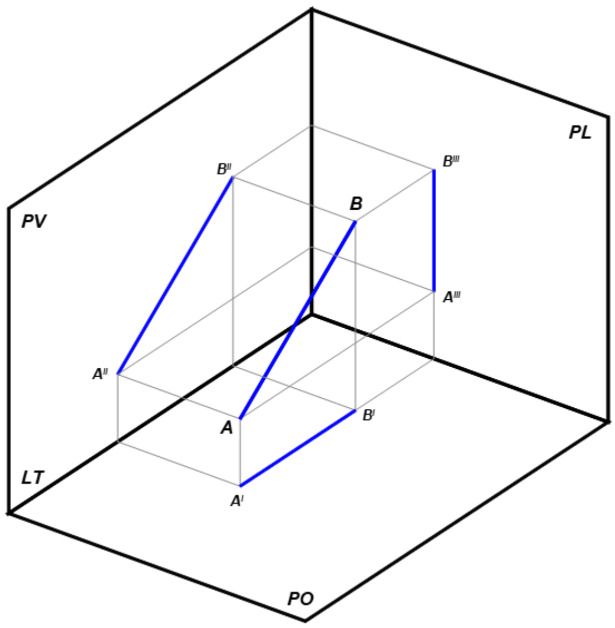
La proiezione sul piano verticale risulterà parallela alla linea di terra, scorciata e tendente ad annullarsi in un punto quanto più l'angolazione rispetto al piano verticale della retta d'appartenenza tenderà a 90°, mentre tenderà alla misura reale quanto più, come evidenziato in precedenza, la retta e quindi il segmento che le appartiene, tende a disporsi parallelamente rispetto al piano verticale.

La proiezione sul piano laterale:

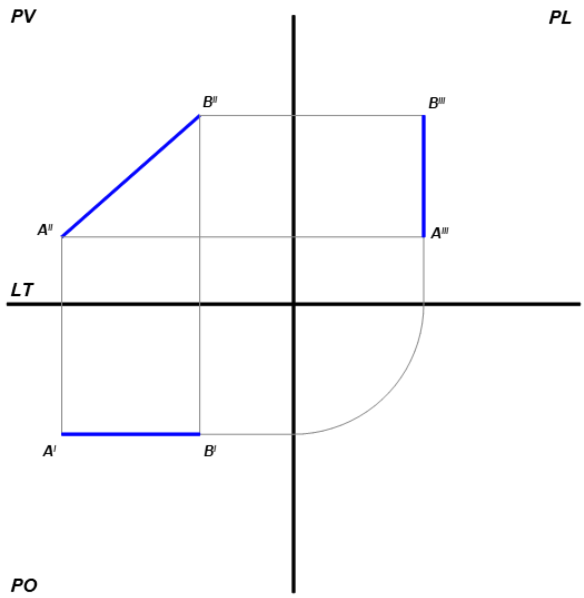
Anche la proiezione sul piano laterale si presenta con le stesse caratteristiche dell'immagine sul piano verticale, ovvero, posizione parallela alla linea di terra e lunghezza scorciata in ragione dell'angolo formato dalla retta d'appartenenza del segmento con il quadro.

Proiezioni ortogonali | Segmenti

VISUALIZZAZIONE TRIDIMENSIONALE



PROIEZIONE ORTOGONALE



Proiezione ortogonale di un segmento parallelo al piano verticale e inclinato rispetto ai piani orizzontale e laterale

La proiezione sul piano verticale:

Il segmento AB si trova in condizione di parallelismo rispetto al piano verticale dove si proietterà con la sua misura oggettiva. Sarà quindi necessario iniziare da questo piano la proiezione ortogonale. La retta d'appartenenza della proiezione $A^{II}B^{II}$ del segmento AB determina sulla linea di terra l'angolazione del segmento rispetto al piano orizzontale.

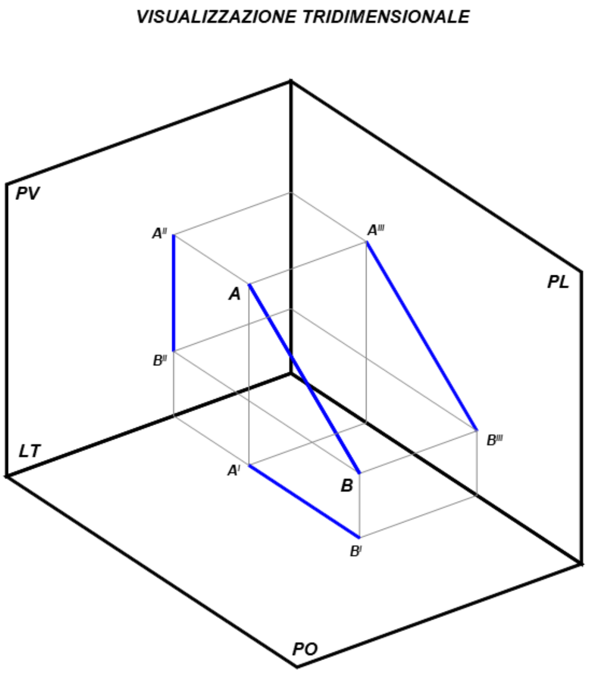
La proiezione sul piano orizzontale:

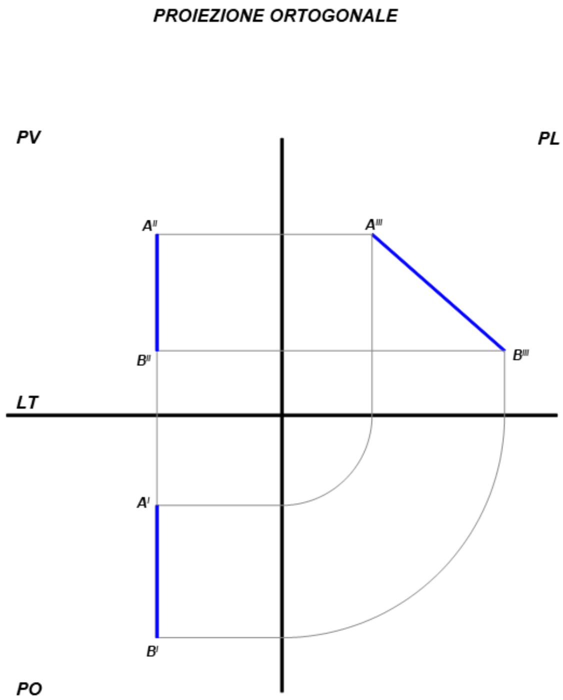
La proiezione sul piano orizzontale risulterà parallela alla linea di terra, di misura scorciata e tendente ad annullarsi in un punto quanto più l'angolazione rispetto al piano orizzontale della retta d'appartenenza tenderà a 90°, mentre tenderà alla misura reale quanto più, come evidenziato in precedenza, la retta e quindi il segmento che le appartiene, tende a disporsi parallelamente rispetto al piano orizzontale.

La proiezione sul piano laterale:

Anche la proiezione sul piano laterale si presenta in posizione parallela alla linea di terra e lunghezza scorciata in ragione dell'angolo formato dalla retta d'appartenenza del segmento con il piano orizzontale.

Proiezioni ortogonali | Segmenti





Segmento parallelo al PL e inclinato rispetto a PV e PO

La proiezione sul piano orizzontale:

La proiezione sul piano orizzontale, in analogia con l'esercizio precedente, risulterà ortogonale alla linea di terra e di conseguenza parallela alla traccia del piano laterale, di misura scorciata e tendente ad annullarsi in un punto quanto più l'angolazione rispetto al piano orizzontale della retta d'appartenenza tenderà a 90°, mentre tenderà alla misura reale quanto più, come evidenziato in precedenza, la retta e quindi il segmento che le appartiene, tende a disporsi parallelamente rispetto al piano orizzontale.

La proiezione sul piano verticale:

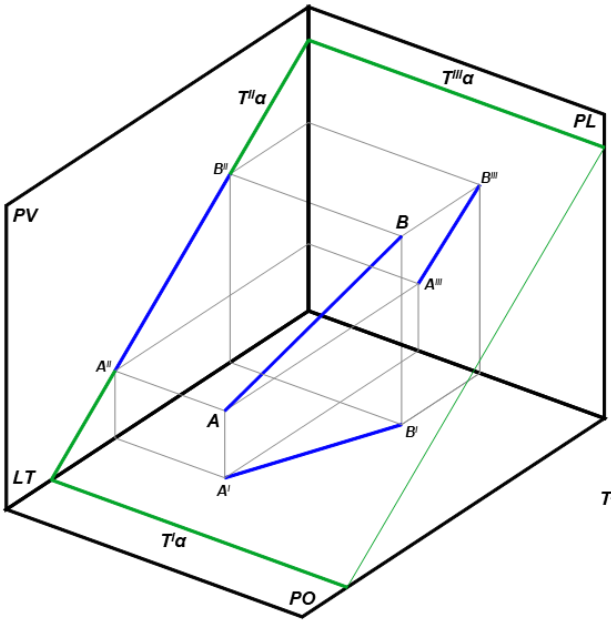
La proiezione sul piano verticale si presenta in posizione parallela alla traccia del piano laterale e di lunghezza scorciata in ragione dell'angolo formato dalla retta d'appartenenza del segmento con il quadro.

La proiezione sul piano laterale:

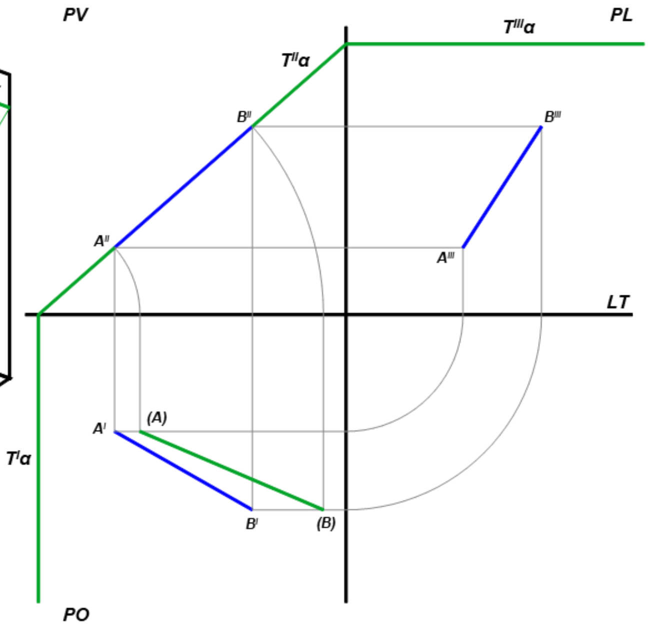
Il segmento AB si trova in condizione di parallelismo rispetto al piano laterale dove si proietterà con la sua misura oggettiva. La retta d'appartenenza della proiezione $A^{III}B^{III}$ del segmento AB determina sulla linea di terra un angolo corrispondente all'inclinazione del segmento rispetto al piano orizzontale.

Proiezioni ortogonali | Segmenti

VISUALIZZAZIONE TRIDIMENSIONALE



PROIEZIONE ORTOGONALE



Proiezione ortogonale di un segmento genericamente inclinato

La proiezione sul piano orizzontale:

Il segmento AB si trova in condizione di inclinazione generica rispetto ai tre piani di proiezione e di conseguenza la proiezione avverrà unendo le proiezioni dei due estremi, i quali si troveranno a quote e aggetti differenti sui tre piani. La retta d'appartenenza sul piano orizzontale intercetterà la linea di terra formando un angolo generico.

Le proiezioni sul piano verticale e laterale:

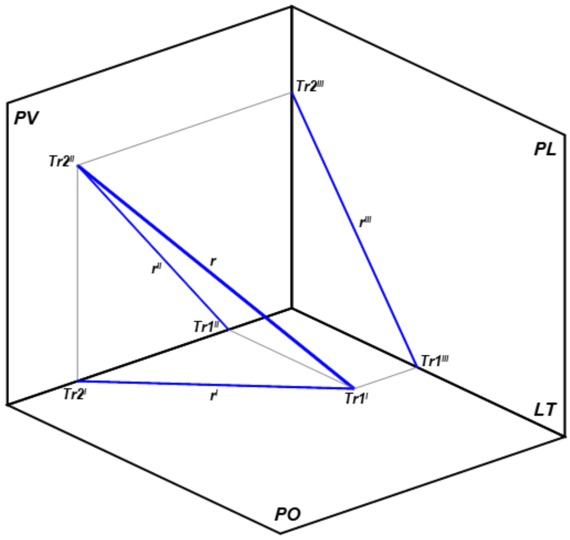
La posizione del segmento AB in condizione di inclinazione generica si ripete anche rispetto ai piani verticale e laterale, di conseguenza per la loro proiezione si procederà analogamente a quanto fatto nel piano orizzontale, essendo condivisibili le stesse considerazioni di carattere proiettivo.

Derminazione della misura reale del segmento

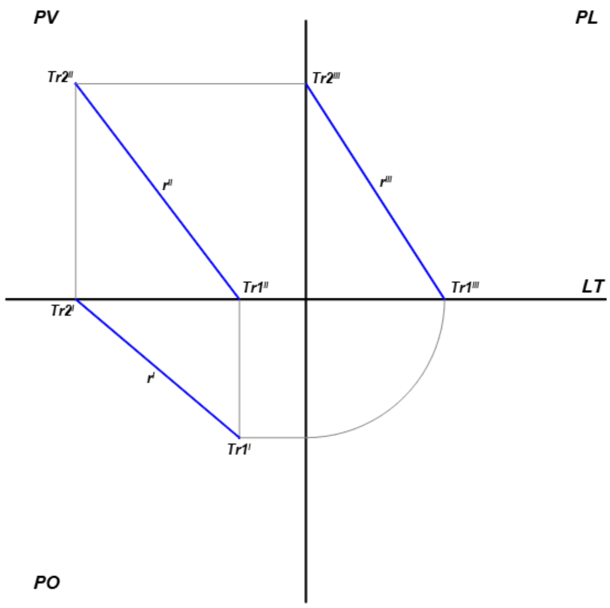
Nel caso che stiamo affrontando, oltre alla proiezione del segmento, si rende necessario procedere alla determinazione della misura oggettiva. Si procede ipotizzando un piano ausiliario α ortogonale al piano verticale passante per AB e successivamente applicando le regole fondamentali della rotazione dei piani. In particolare, poiché durante la rotazione i punti mantengono la stessa distanza dalla cerniera e ruotano per piani ortogonali alla cerniera, sarà abbastanza semplice determinare la reale misura di AB sul piano orizzontale, facendoli ruotare intorno alla cerniera TIα.

Proiezioni ortogonali | Rette

VISUALIZZAZIONE TRIDIMENSIONALE ASSONOMETRICA



PROIEZIONE ORTOGONALE



Proiezione ortogonale di una retta generica

Nomenclatura delle tracce e proiezione sul piano orizzontale

La retta generica r interseca i piani nelle tracce Tr1 sul piano orizzontale e Tr2 sul piano verticale. La lettera maiuscola T indica la traccia, la lettera minuscola, in questo caso la r, indica il nome della retta, il numero 1-2-3 indica il piano dove si trova la traccia della retta, ovvero 1 piano orizzontale, 2 piano verticale e 3 piano laterale. A questa nomenclatura si deve aggiungere l'apice " ^{I} ", " ^{II} ", " ^{III} ", in ragione della proiezione del punto sui tre piani principali. Quindi la traccia della retta r sul piano orizzontale sarà definita da "Tr1^{I}", sul piano verticale sarà definita da "Tr1^{II}" e sul piano laterale da " Tr1^{III} ". A stretto rigore di logica, poiché il punto della retta coincide con la sua proiezione, si dovrebbe indicare nel modo " Tr1≡ Tr1^{I} ", ma la dicitura " Tr1^{I} " rappresenta una semplificazione assolutamente accettabile. Nel caso della prima proiezione della retta r generica si procede unendo la traccia sul piano orizzontale Tr1^{I} con la proiezione ortogonale della traccia sul piano verticale (Tr2^{II}) sul piano orizzontale, Tr2^{I}. La proiezione Tr2^{I} si trova sulla linea di terra, e il segmento Tr2^{I} - Tr1^{I} rappresenta r^{I} prima proiezione della retta generica r. È doveroso ricordare che la nomenclatura relativa ai punti coincidenti con la linea di terra deve essere inserita nel piano corrispondente alla proiezione. Mai un punto in prima proiezione dovrà essere indicato al di sopra della linea di terra (piano verticale) così come mai l'indicazione di un punto in seconda proiezione potrà trovarsi al di sotto della linea di terra (piano orizzontale).

Le proiezioni sul piano verticale

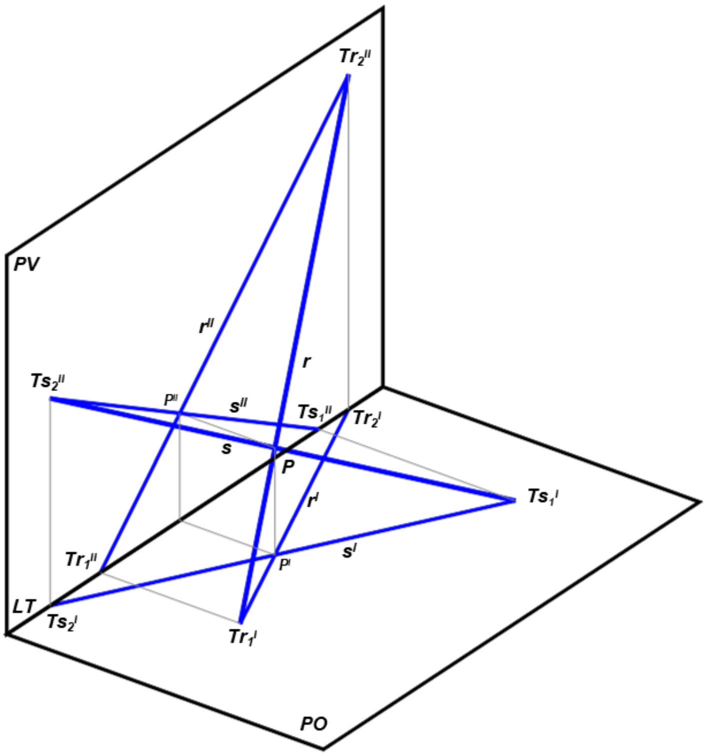
Sulla base delle considerazioni esposte, le proiezioni sui piani verticale e laterale seguiranno la stessa metodologia esecutiva. Si procede unendo la traccia sul piano verticale Tr2^{II} con la proiezione ortogonale della traccia sul piano orizzontale (Tr1^{I}) sul piano verticale, Tr1^{II}. La proiezione c si trova sulla linea di terra, mentre il segmento Tr2^{II}-Tr1^{II} rappresenta r^{II} seconda proiezione della retta generica r.

Le proiezioni sul piano laterale

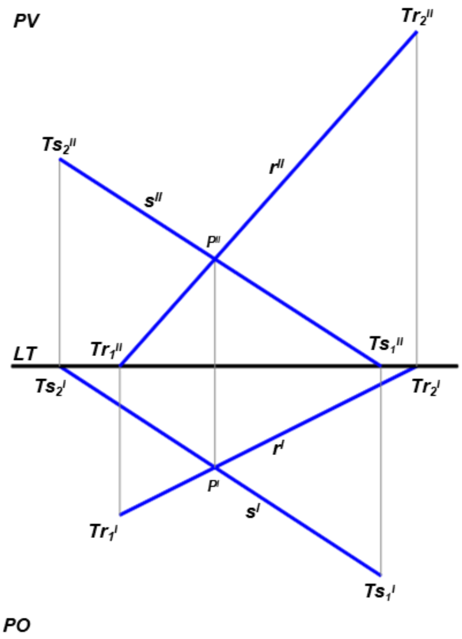
La proiezione sul terzo piano di proiezione presenta, in questo caso specifico, una sostanziale differenza con gli altri due piani principali poiché nessuna delle due tracce si trova su tale piano e di conseguenza la proiezione r^{III} della retta sarà data dal segmento Tr2^{III} - Tr1^{III} proiezioni delle tracce sul piano laterale.

Proiezioni ortogonali | Rette

VISUALIZZAZIONE TRIDIMENSIONALE



PROIEZIONE ORTOGONALE



Proiezione ortogonale di due rette incidenti

Proiezione della retta s

La prima proiezione della retta generica s si determina unendo la traccia sul piano orizzontale $Ts1^{I}$ con la proiezione ortogonale della traccia sul piano verticale ($Ts2^{II}$) sul piano orizzontale, $Ts2^{I}$. La proiezione $Ts2^{I}$ si trova sulla linea di terra e il segmento $Ts2^{I}$ - $Ts1^{I}$ rappresenta r^{I} prima proiezione della retta generica r. Analogamente si procede sul piano verticale per la determinazione della seconda proiezione unendo la traccia sul piano verticale $Ts2^{II}$ con la proiezione ortogonale della traccia sul piano orizzontale ($Ts1^{I}$) sul piano verticale, $Ts1^{II}$. La proiezione $Ts1^{II}$ si trova sulla linea di terra e il segmento $Ts2^{II}$ - $Ts1^{II}$ rappresenta s^{II} seconda proiezione della retta generica s.

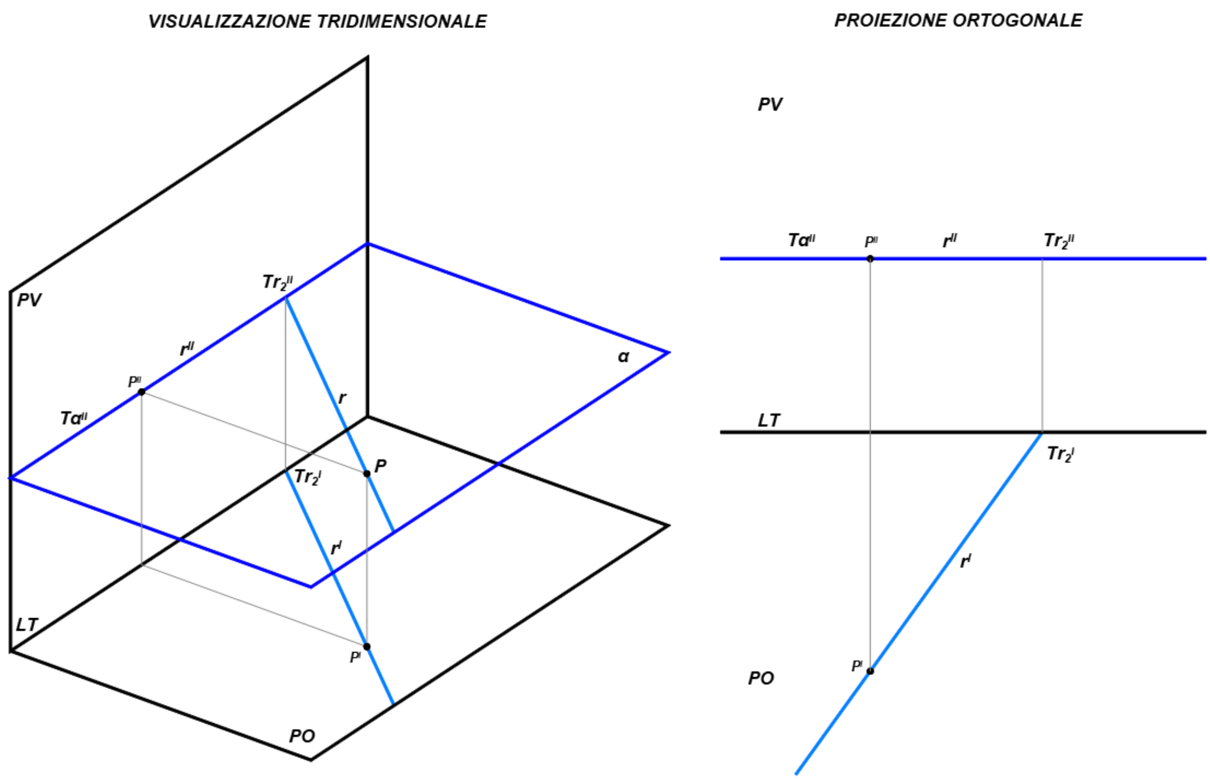
Proiezione della retta r

Individuato su s^{I} il punto P^{I} per tracciare la retta r passante per P, si procede fissando a piacere una delle due tracce di r, ad esempio $Tr1^{I}$ e successivamente tracciando la retta passante per $Tr1^{I}$ e P^{I} fino ad intercettare la linea di terra nel punto $Tr2^{I}$, prima proiezione della traccia di r sul piano verticale. Il segmento $Tr1^{I}$ – $Tr2^{I}$ passante per P^{I} rappresenta la prima proiezione della retta r incidente nel punto P con la retta s. A seguire si proietta sul piano verticale la traccia $Tr1^{I}$ e il raggio proiettante verticale passante per $Tr2^{I}$. Per imporre la condizione d'appartenenza di P con la retta r si traccia la retta passante per $Tr1^{II}$ e per P^{II} fino ad intercettare il raggio verticale passante per $Tr2^{I}$ nel punto $Tr2^{II}$ traccia della retta r sul piano verticale. Il segmento $Tr1^{II}$ – $Tr2^{II}$ passante per P^{II} rappresenta la seconda proiezione della retta r incidente nel punto P con la retta s.

Il punto d'intersezione P

Le proiezioni di P, intersezione delle rette r ed s, coincidono con le intersezioni delle corrispondenti proiezioni delle rette. Poiché un punto appartiene ad una retta se le sue proiezioni appartengono alle rispettive proiezioni della retta, le proiezioni del punto P, dovranno necessariamente appartenere sia alla proiezione di r che a quella di s: $P^{I} \in r^{I}$ e $P^{I} \in s^{I}$ così come $P^{II} \in r^{II}$ e $P^{II} \in s^{II}$.

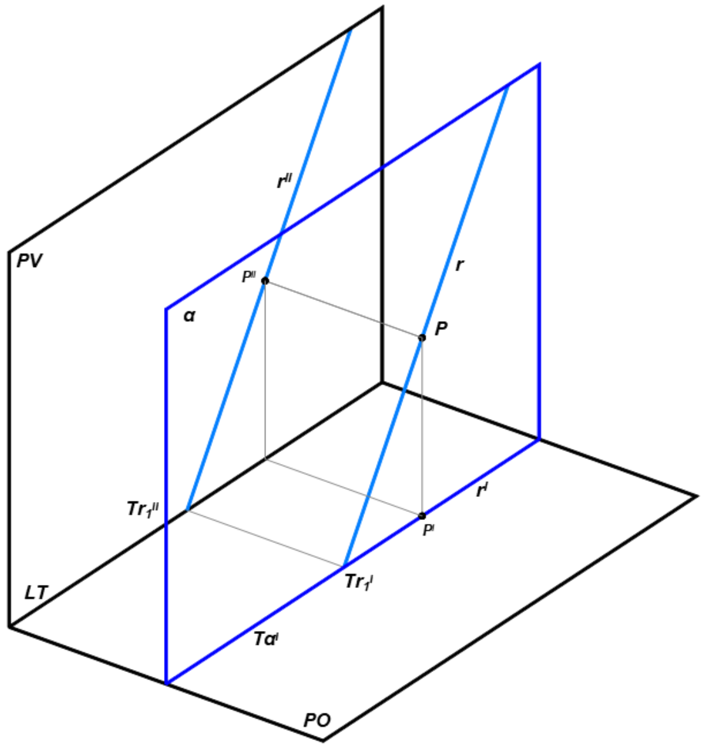
Proiezioni ortogonali | Piani



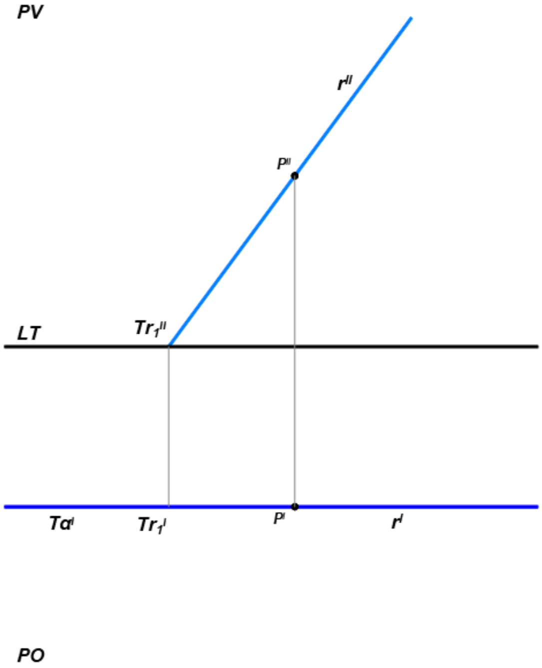
Piano α parallelo al piano orizzontale.
Condizioni d'appartenenza di un punto P di una retta r appartenente al piano α.

Per rappresentare un piano α parallelo al piano orizzontale, partiamo dalla considerazione che due piani sono paralleli se sono parallele le rispettive tracce sui piani di proiezione. Data la distanza del piano α dal piano orizzontale, sarà sufficiente tracciare a tale quota sul piano verticale una retta parallela all'intersezione del piano orizzontale con il piano verticale, ovvero la linea di terra. Tale retta rappresenta la traccia del piano α sul piano verticale.
Consideriamo adesso la condizione d'appartenenza di una retta r al piano α. Sappiamo che una retta appartiene ad un piano se le sue tracce appartengono alle rispettive tracce del piano, oppure ad una traccia e ad un punto del piano. Rappresentiamo quindi la retta r con la seconda traccia in un punto della seconda traccia del piano α.
Il punto P appartenente alla retta r e al piano α avrà le proiezioni sulle rispettive proiezioni della retta. Notiamo che mentre sul piano orizzontale la proiezione di r è generica, sul piano verticale la proiezione di r e quindi anche la proiezione di P appartengono alla traccia del piano α. Infatti data la condizione di perpendicolarità del piano α rispetto al piano verticale, tutti i punti del piano α si proiettano sulla seconda traccia del piano.

VISUALIZZAZIONE TRIDIMENSIONALE



PROIEZIONE ORTOGONALE

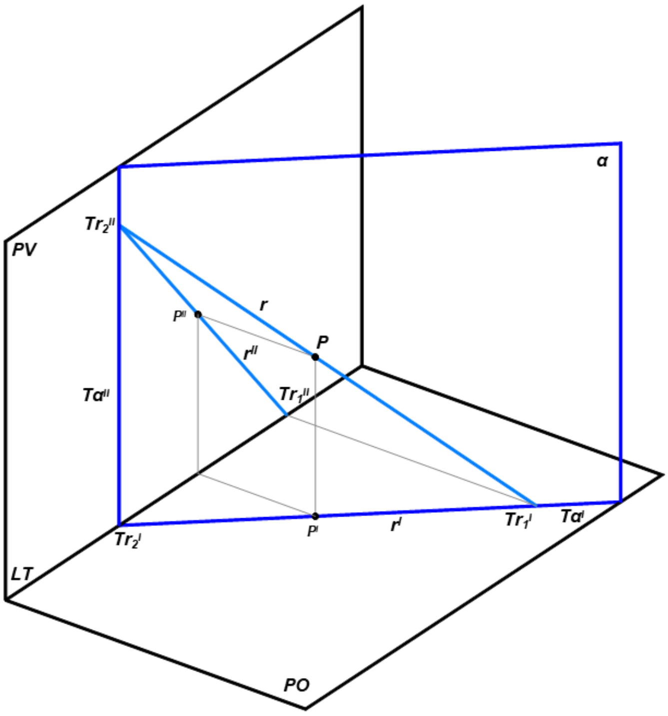


Piano α parallelo al piano verticale.
Condizioni d’appartenenza di un punto P di una retta r appartenente al piano α.

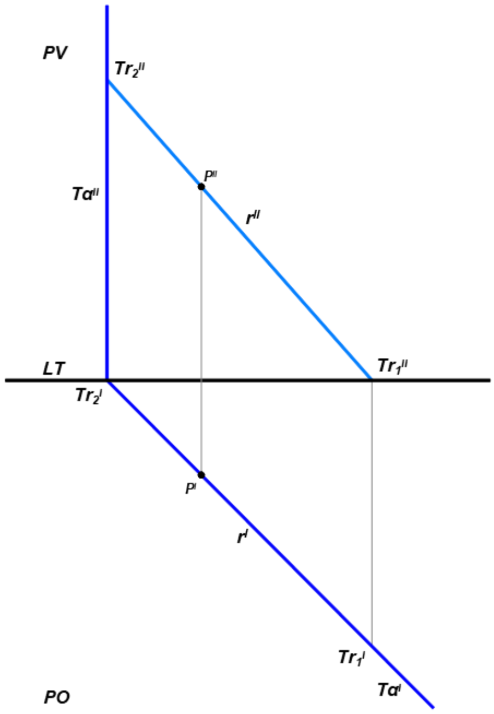
Rappresentiamo un piano α parallelo al piano verticale, che in considerazione di quanto mostrato in precedenza presenterà le rispettive tracce parallele sui piani di proiezione. Data la distanza del piano α dal piano verticale, sarà sufficiente tracciare a tale aggetto sul piano orizzontale, una retta parallela alla linea di terra. Tale retta rappresenta la traccia del piano α sul piano orizzontale.
La condizione d’appartenenza di una retta r rispetto al piano α è determinata se le tracce della retta appartengono alle rispettive tracce del piano, oppure se la sua proiezione passa per una traccia e ad un punto del piano. Rappresentiamo quindi la retta r con la seconda traccia in un punto della seconda traccia del piano α.
Il punto P appartenente alla retta r e al piano α avrà le proiezioni sulle rispettive proiezioni della retta. Si può notare che mentre sul piano verticale la proiezione di r è generica, sul piano orizzontale la proiezione di r e quindi anche la proiezione di P appartengono alla traccia del piano α. Infatti data la condizione di perpendicolarità del piano α rispetto al piano orizzontale, tutti i punti del piano α si proiettano sulla prima traccia del piano α.

Proiezioni ortogonali | Piani

VISUALIZZAZIONE TRIDIMENSIONALE



PROIEZIONE ORTOGONALE

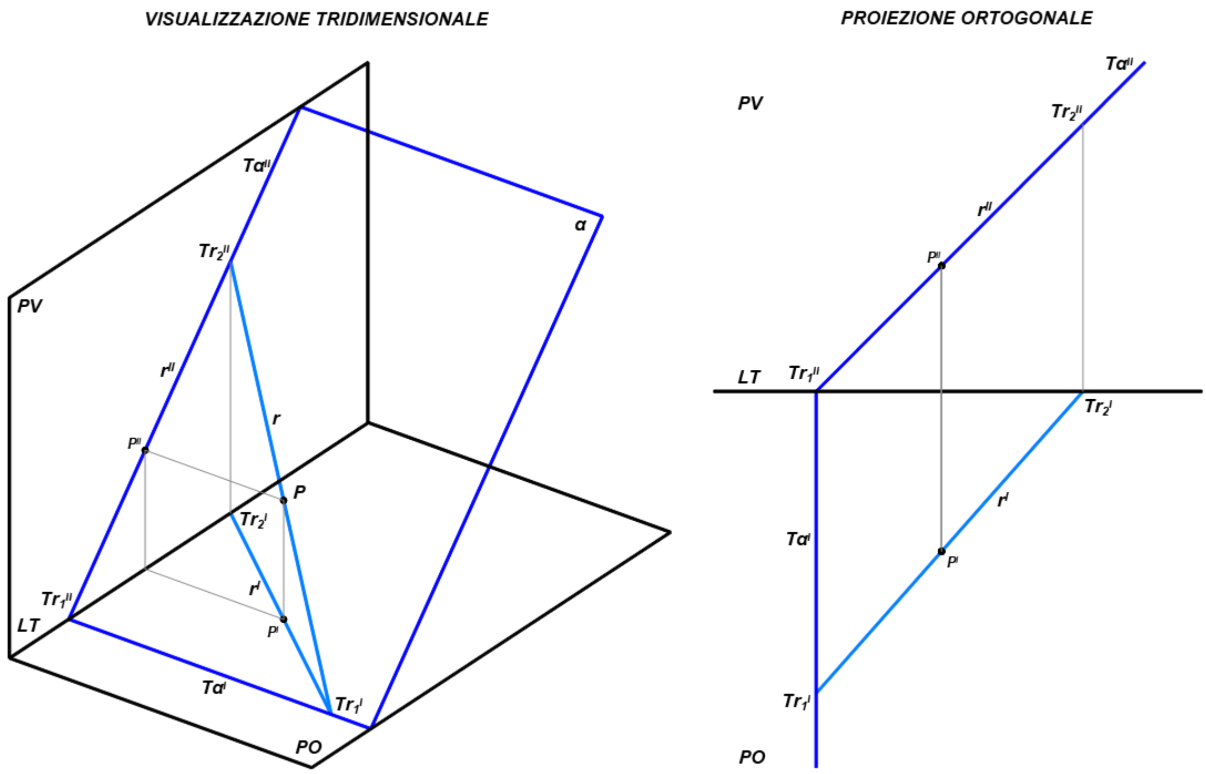


Piano proiettante α ortogonale al piano orizzontale e inclinato al piano verticale.
Condizioni d'appartenenza di un punto P di una retta r appartenente al piano α.

La rappresentazione del piano α ortogonale al piano orizzontale e inclinato rispetto al piano verticale presenta alcuni aspetti significativi. In particolare rileveremo la condizione di ortogonalità rispetto al piano orizzontale sul piano verticale, dove la seconda traccia del piano α formerà un angolo di 90° rispetto alla linea di terra. In modo analogo l'inclinazione rispetto al piano verticale sarà "leggibile" sul piano orizzontale dove l'angolo formato dalla prima traccia del piano α rispetto alla linea di terra si presenterà in ampiezza oggettiva.

Se adesso ipotizziamo una retta r appartenente a α, fatta eccezione alcune posizioni particolari, ovvero di parallelismo rispetto ad uno dei due piani principali, tale retta ha le tracce sulle rispettive tracce del piano. Inoltre la prima proiezione della retta coinciderà con la prima traccia del piano α.

Le proiezioni del punto P appartenente al piano α coincideranno con le rispettive proiezioni della retta r, a sua volta appartenente al piano α.



Piano proiettante α ortogonale al piano verticale e inclinato al piano orizzontale.
Condizioni d'appartenenza di un punto P di una retta r appartenente al piano α.

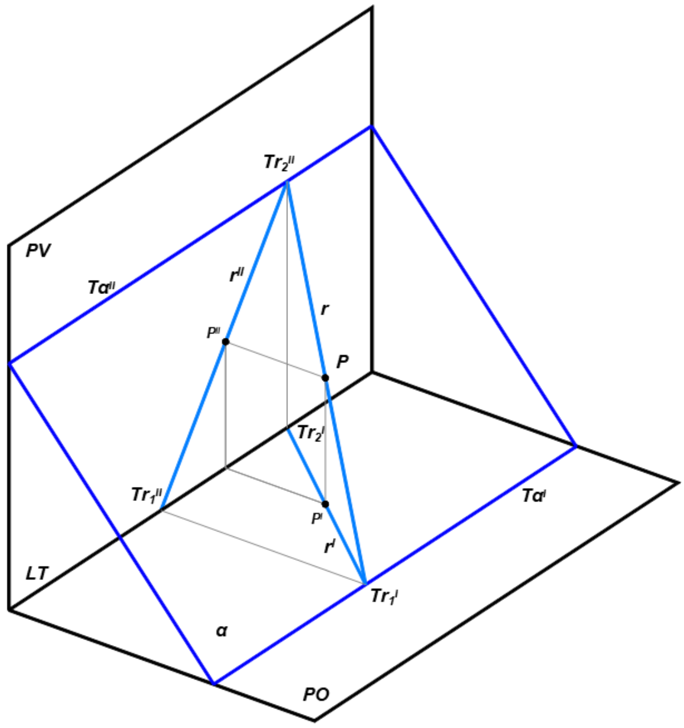
Il piano α, inclinato rispetto al piano orizzontale e ortogonale rispetto al piano verticale, presenta la prima traccia ortogonale alla linea di terra e la seconda traccia inclinata sul piano verticale che esprime l'oggettiva inclinazione del rispetto al piano orizzontale.

La retta r appartenente al piano α inclinato avrà le tracce, come evidenziato in precedenza, sulle rispettive tracce del piano, mentre per quanto riguarda le proiezioni sarà necessario proiettare ortogonalmente al piano orizzontale la traccia della retta sul piano verticale e analogamente si dovrà proiettare sul piano verticale la prima traccia appartenente come si detto alla prima traccia del piano α. Entrambe le proiezioni delle due tracce si trovano, sulla linea di terra che è bene rimarcare rappresenta il luogo geometrico dei punti appartenenti sia al piano orizzontale che al piano verticale. Unendo le delle tracce della retta rispettivamente sui piani orizzontale e verticale otteniamo le due proiezioni della retta r.

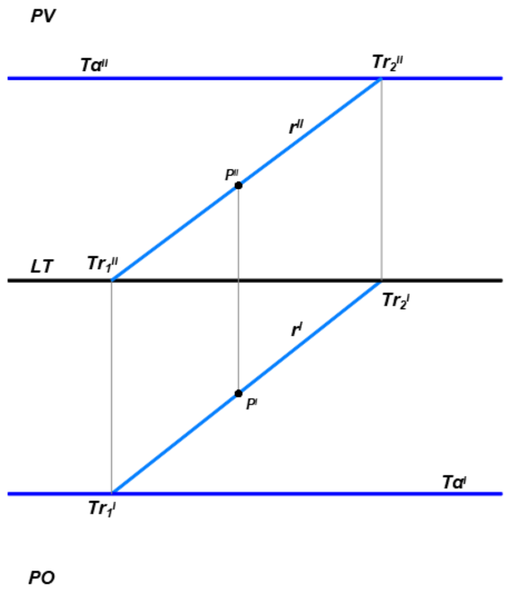
Il punto P appartenente alla retta r, a sua volta appartenente al piano α, dovrà avere le sue proiezioni sulle rispettive proiezioni della retta r. Nella proiezione ortogonale il punto P sarà quindi individuato dalle intersezioni del raggio ortogonale alla linea di terra con le proiezioni della retta r.

Proiezioni ortogonali | Piani

VISUALIZZAZIONE TRIDIMENSIONALE



PROIEZIONE ORTOGONALE



Piano α inclinato al piano orizzontale e al piano verticale, e parallelo alla linea di terra. Condizioni d'appartenenza di un punto P di una retta r appartenente al piano α.

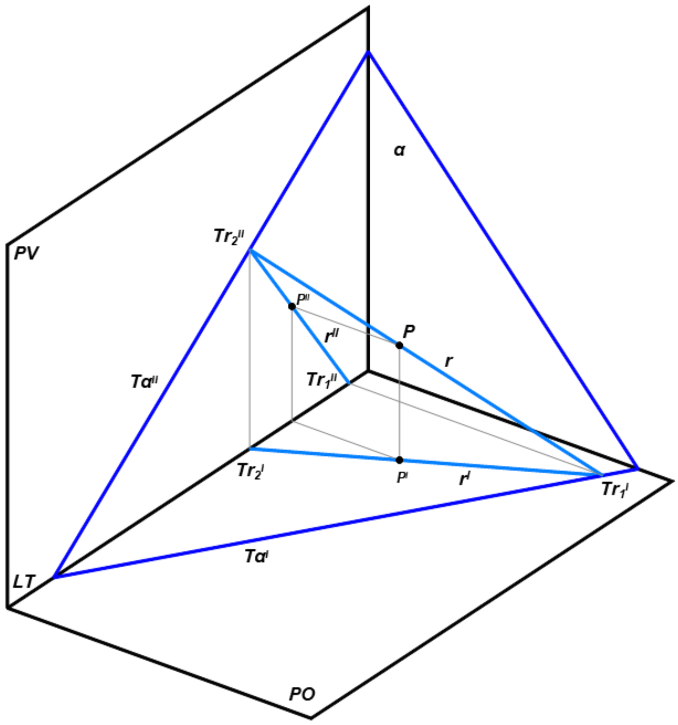
Il piano α, inclinato sia rispetto al piano orizzontale che al piano verticale e parallelo alla linea di terra, è individuato dalle tracce entrambe parallele rispetto alla linea di terra.

La retta r appartenente al piano α inclinato avrà le tracce sulle rispettive tracce del piano, mentre per quanto riguarda le proiezioni sarà necessario proiettare ortogonalmente al piano verticale la traccia che si trova sul piano orizzontale e analogamente si dovrà proiettare sul piano orizzontale la seconda traccia che giace sul piano verticale. Le proiezioni delle due tracce si trovano, come più volte rilevato, sulla linea di terra. Sarà sufficiente unire le proiezioni delle tracce della retta rispettivamente sui piani orizzontale e verticale per ottenere le due proiezioni della retta r.

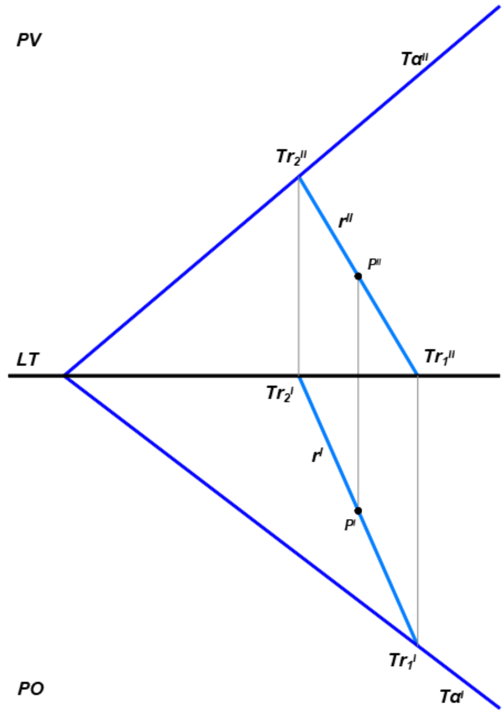
Il punto P appartenente alla retta r, a sua volta appartenente al piano α genericamente inclinato, dovrà avere le sue proiezioni sulle rispettive proiezioni della retta r. Nella proiezione ortogonale il punto P sarà quindi individuato dalle intersezioni del raggio ortogonale alla linea di terra con le proiezioni della retta r.

Proiezioni ortogonali | Piani

VISUALIZZAZIONE TRIDIMENSIONALE



PROIEZIONE ORTOGONALE



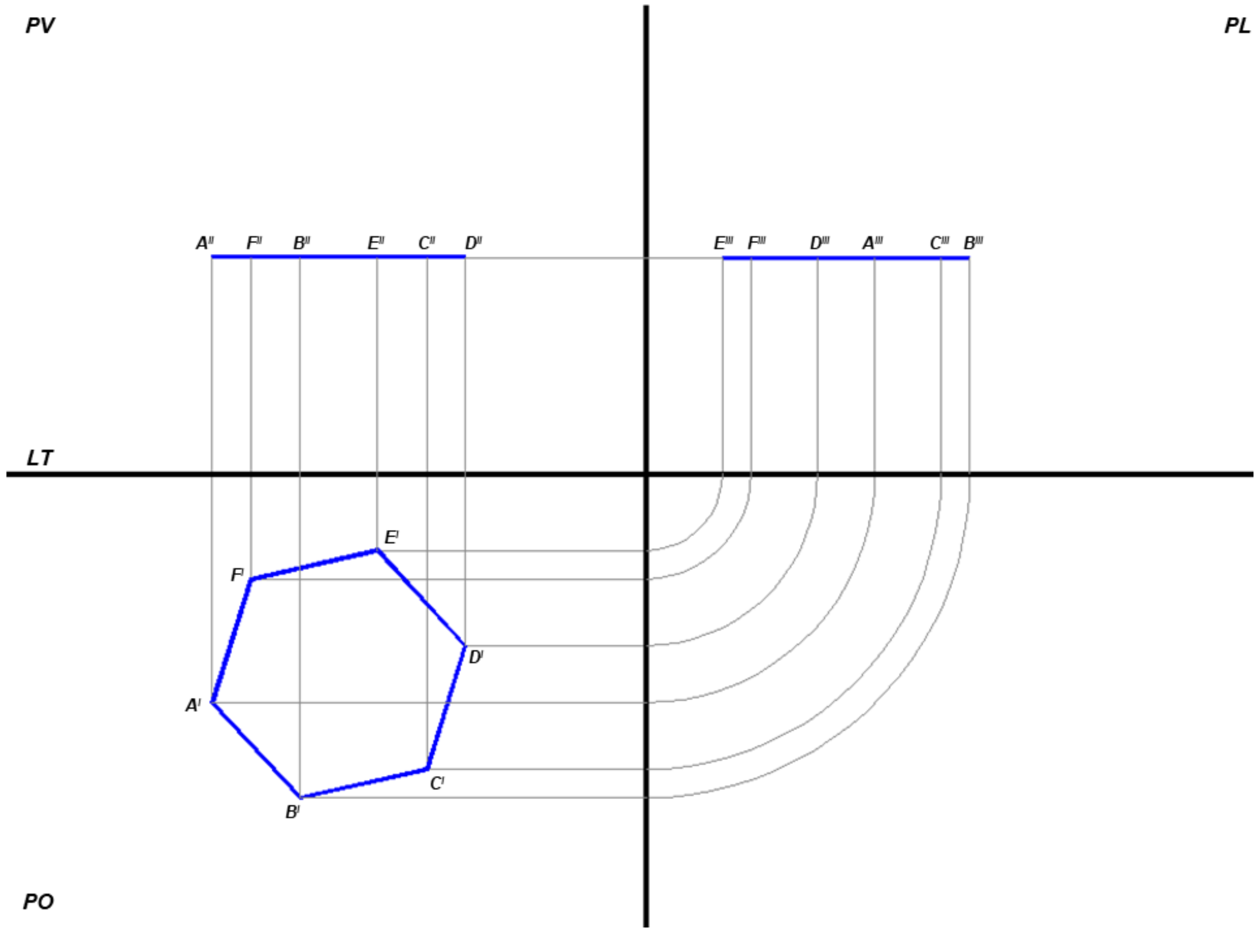
Piano α genericamente inclinato sia al PO che al PV.
Condizioni d'appartenenza di un punto P di una retta r appartenente al piano α.

Il piano α, inclinato in modo generico sia rispetto al piano orizzontale che al piano verticale, viene individuato dalle tracce entrambe inclinate rispetto alla linea di terra.

La retta r appartenente al piano α inclinato avrà le tracce sulle rispettive tracce del piano, mentre per quanto riguarda le proiezioni sarà necessario proiettare ortogonalmente al piano verticale la traccia che si trova sul piano orizzontale e analogamente si dovrà proiettare sul piano orizzontale la seconda traccia che giace sul piano verticale. Entrambe queste proiezioni delle due tracce si trovano, seppur su piani diversi, sulla linea di terra. Sarà sufficiente unire le due proiezioni delle tracce della retta rispettivamente sui piani orizzontale e verticale per ottenere le due proiezioni della retta r.

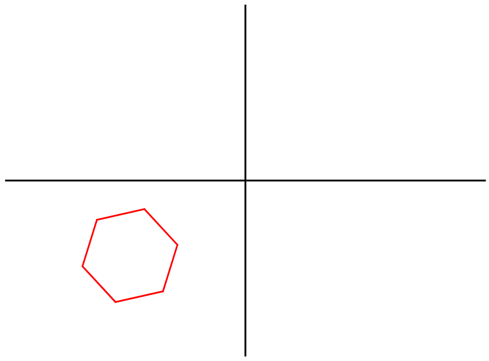
Il punto P appartenente alla retta r, a sua volta appartenente al piano α genericamente inclinato, dovrà avere le sue proiezioni sulle rispettive proiezioni della retta r. Nella proiezione ortogonale il punto P sarà quindi individuato dalle intersezioni del raggio ortogonale alla linea di terra con le proiezioni della retta r.

Proiezioni ortogonali | Figure piane



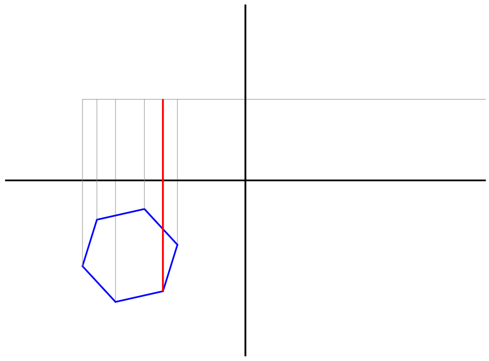
Proiezione ortogonale di un esagono regolare parallelo al piano orizzontale

1 – Impostazione dei piani di proiezione
Tracciare la LT.
Impostare la traccia del piano laterale determinando PO, PV e PL.
2 – Proiezione sul Piano Orizzontale
Rappresentare, parallelamente al PO, in posizione generica rispetto a PV e PL, l'esagono regolare ABCDEF.
3 – Proiezione sul Piano Verticale
Tracciare il raggio proiettante orizzontale alla distanza H dalla LT.
Proiettare sul PV i punti dell'esagono: A – D – F – B – E – C.
Ripassare con segno di linea a vista la proiezione sul PV.
4 – Proiezione sul Piano Laterale
Proiettare sul PL i punti dell'esagono in prima proiezione: E – B – F – D – A – C. Ripassare con segno di linea a vista la proiezione sul PL.

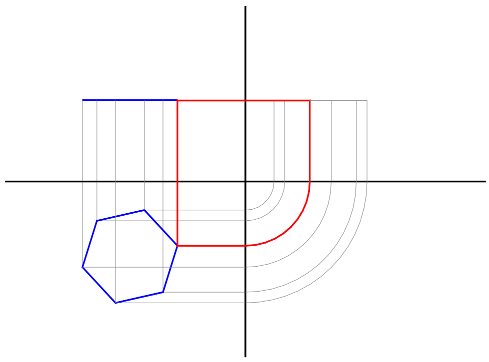


Tracciare l'esagono sul PO nella forma e misure reali poiché parallelo al piano di proiezione e ruotato di un angolo generico in modo tale da non far coincidere fra loro alcun punto nella proiezione sui piani verticale e laterale. L'esagono in condizione di parallelismo rispetto al piano orizzontale sarà rappresentato in vera forma, mantenendo inalterate le misure lineari e angolari.

Una volta determinata, qualora fosse specificato nel testo della consegna, la distanza dell'esagono dal PO, tracciare sul piano verticale una retta orizzontale a tale distanza dalla linea di terra e proiettare i sei punti dell'esagono sul piano verticale ortogonalmente alla linea di terra. Le intersezioni con la retta determinano la seconda proiezione dell'esagono regolare sul piano verticale.

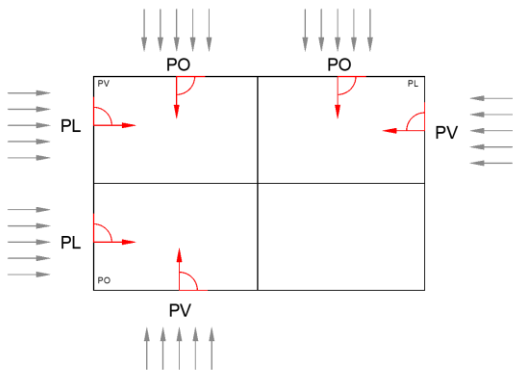


La proiezione sul PL sarà data dall'intersezione dei raggi proiettati ortogonalmente dal piano orizzontale sull'asse, traccia del piano laterale, e riportati con il compasso puntato nell'origine dei piani di proiezione. Nell'intersezione degli archi di rotazione con la linea di terra tracciare i raggi ortogonali verticali fino ad intercettare la retta orizzontale sul piano laterale. Anche la proiezione sul piano laterale, così come quella sul PV, manterrà la medesima distanza e condizione di parallelismo rispetto alla LT. Data la condizione di ortogonalità rispetto al PV e al PL tali proiezioni saranno rappresentate da un segmento.

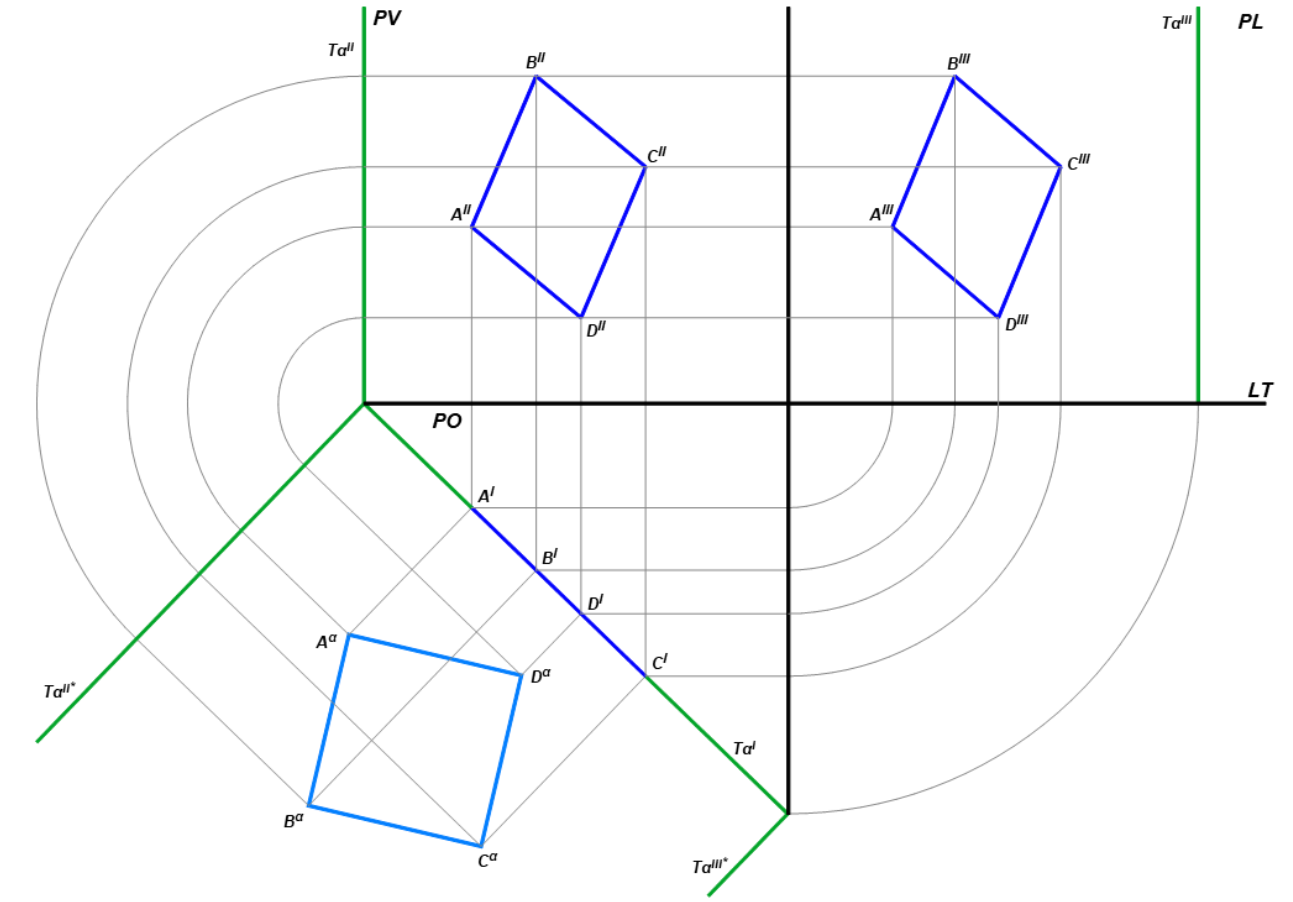


È possibile rappresentare le figure piane, solo se queste si trovano in condizioni di parallelismo rispetto al piano di proiezione. In tali condizioni proiettive l'immagine manterrà la vera forma e grandezza dell'oggetto reale.

Direzioni dei raggi proiettanti rispetto ai Piani Principali



Proiezioni ortogonali | Figure piane



Proiezione ortogonale di un quadrato perpendicolare al piano orizzontale e inclinato di 45° rispetto al piano verticale

1 – Impostazione dei piani di proiezione

Tracciare la linea di terra LT e ortogonalmente la traccia del piano laterale, che individua i piani principali PO, PV e PL.

2 – Individuazione del piano inclinato α

Impostare sul PO la $T\alpha^{I}$ inclinata di 45° rispetto alla LT. Tracciare sul PV la $T\alpha^{II}$ ortogonalmente alla LT. Tracciare sul PL la $T\alpha^{III}$ ortogonalmente alla LT.

3 – Ribaltamento del piano inclinato α

Ribaltare il piano α riportando $T\alpha^{II}$ e $T\alpha^{III}$ ortogonalmente rispetto alla $T\alpha^{I}$ sul PO.

4 – Proiezione sul piano orizzontale

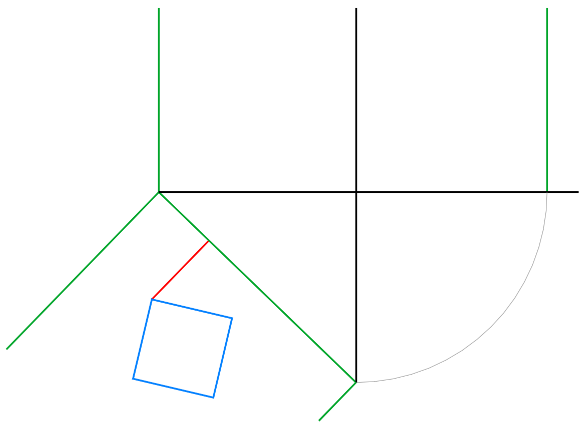
Rappresentare oggettivamente il quadrato A-B-C-D sul piano α. Proiettare ortogonalmente alla $T\alpha^{I}$ i punti: A – B – C – D Individuare sul PO la prima proiezione del quadrato A-B-C-D.

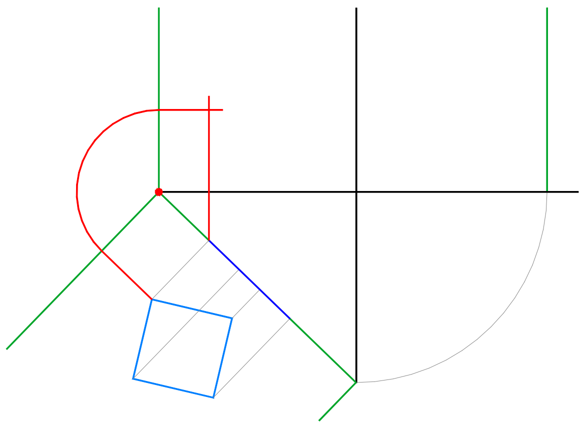
5 – Proiezione sul piano verticale

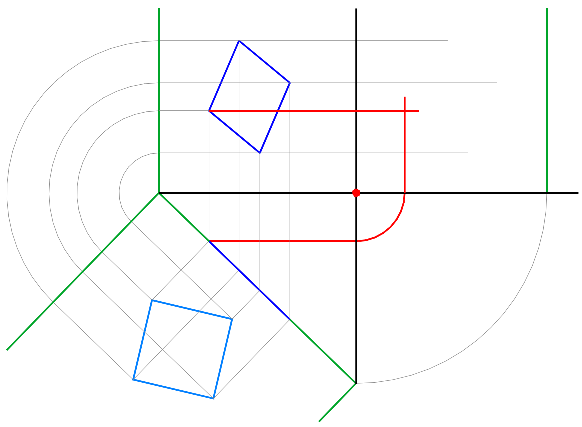
Determinare la seconda proiezione sul PV nell'intersezione fra raggi del PO ortogonali alla LT e i raggi del piano α ortogonali alla $T\alpha^{II*}$ e collegare i punti: A – B – C – D.

6 – Proiezione sul piano laterale

Determinare la terza proiezione sul PL nell'intersezione fra raggi del PV ortogonali alla traccia del PL e i raggi del PO ortogonali alla LT: A – B – C – D.







Il quadrato, ortogonale al piano orizzontale e inclinato rispetto ai piani verticale e laterale non permette, una immediata rappresentazione della figura sui piani principali. Non potendosi applicare la condizione di parallelismo, l'unica che permette di rappresentare oggettivamente le figure piane sui piani principali, imposteremo anche in questo caso una proiezione virtuale su un piano ausiliario. Impostato α, piano d'appartenenza del quadrato, con le relative tracce $T\alpha^{I}$, $T\alpha^{II}$ e $T\alpha^{III}$, si ipotizza il ribaltamento sul piano orizzontale, intorno alla cerniera $T\alpha^{I}$. Rappresentiamo il quadrato ABCD in vera forma e grandezza sul piano α ribaltato e ricordando che "i punti ruotano secondo piani ortogonali alla cerniera", procediamo alla proiezione dei punti ortogonalmente alla $T\alpha^{I}$.

Data la condizione d'appartenenza del quadrato ABCD con il piano α, la proiezione sul piano orizzontale coinciderà con la traccia del piano ausiliario. I punti in seconda proiezione si determineranno nell'intersezione dei raggi proiettanti provenienti dal piano orizzontale con i raggi provenienti dal piano ribaltato α. I punti del piano α saranno proiettati ortogonalmente alla $T\alpha^{II*}$, e successivamente, poiché "i punti ruotano mantenendo inalterata la loro distanza dalla cerniera", riportati con il compasso dal punto di intersezione di $T\alpha^{II}$ con la linea di terra. Nel punto di intersezione fra gli archi e la $T\alpha^{II}$, si tracceranno i raggi proiettanti ortogonali alla $T\alpha^{II}$, fino ad intercettare il raggio proiettante ortogonale proveniente dal piano orizzontale. Unendo i punti consecutivi si ottiene il quadrilatero ABCD proiezione sul piano verticale.

Per la definizione della proiezione sul piano laterale sarà sufficiente intercettare sul piano laterale i raggi proiettanti ortogonali provenienti dal piano orizzontale e dal piano verticale. Unire, sul piano laterale, i punti consecutivi e rappresentare il quadrilatero ABCD in terza proiezione.

La rotazione dei piani è definita da quattro regole fondamentali per la corretta esecuzione della gran parte dei problemi proiettivi.

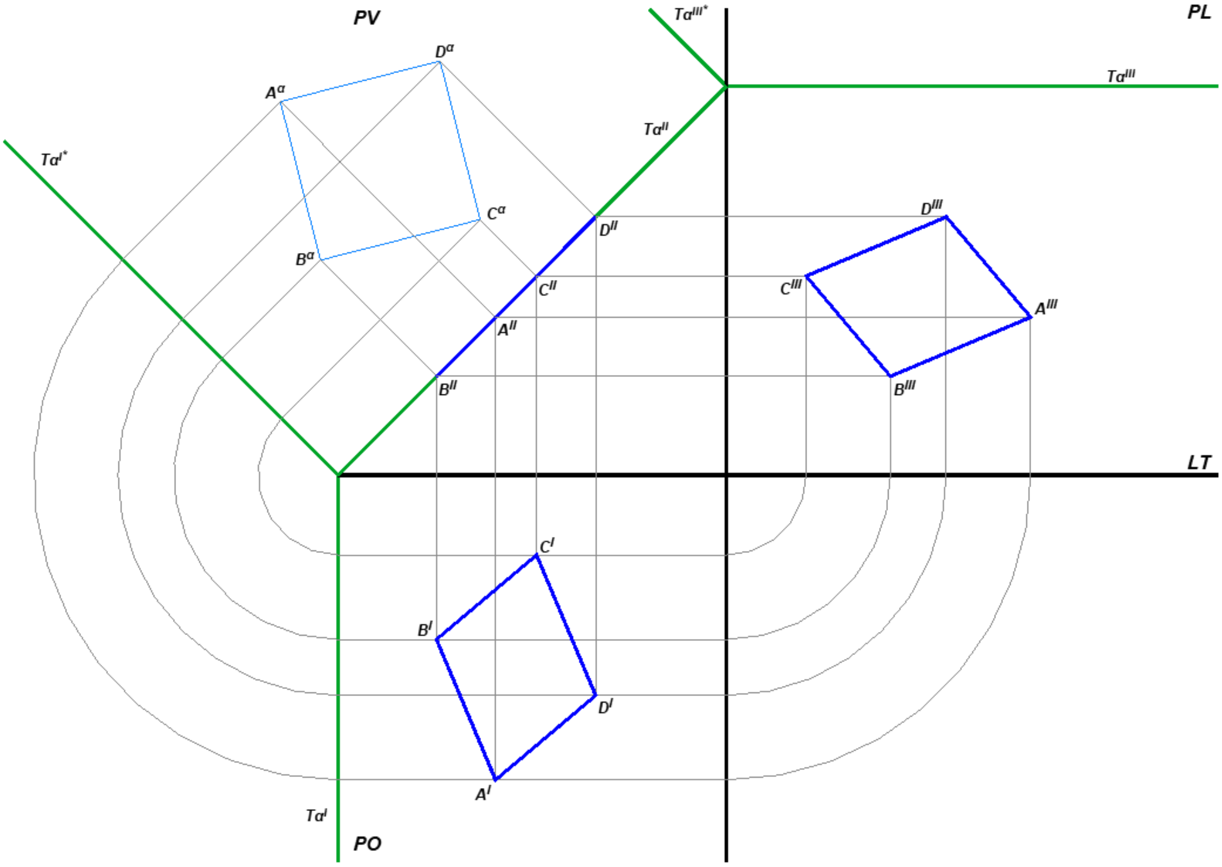
1. I piani ruotano rispetto ad una retta detta cerniera

2. I punti del piano mantengono durante la rotazione la stessa distanza dalla cerniera

3. I punti del piano descrivono, durante la rotazione, archi che hanno il centro nella cerniera

4. Gli archi di rotazione appartengono a piani ortogonali alla cerniera

Proiezioni ortogonali | Figure piane



Proiezione ortogonale di un quadrato perpendicolare al piano verticale e inclinato di 45° rispetto al piano orizzontale

1 – Impostazione dei piani di proiezione

Tracciare la linea di terra LT e ortogonalmente la traccia del piano laterale, che individua i piani principali PO, PV e PL.

2 – Individuazione del piano inclinato α

Impostare sul PV la $T\alpha^{II}$ inclinata di 45° LT. Tracciare sul PO la $T\alpha^{I}$ ortogonalmente alla LT. Tracciare sul PL la $T\alpha^{III}$ ortogonalmente alla traccia del PV.

3 – Ribaltamento del piano inclinato α

Ribaltare il piano α riportando $T\alpha^{I}$ e $T\alpha^{III}$ ortogonalmente rispetto alla $T\alpha^{II}$ sul PV.

4 – Proiezione sul piano verticale

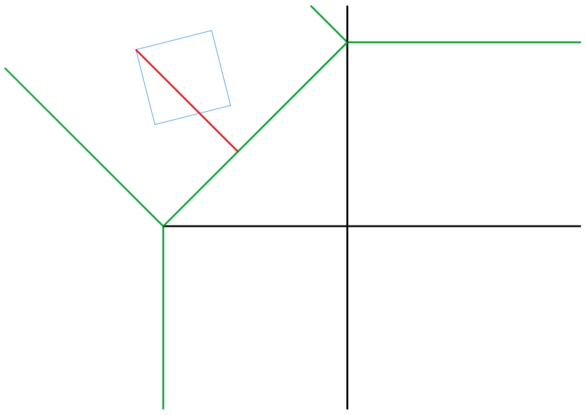
Rappresentare oggettivamente il quadrato A-B-C-D sul piano α. Proiettare ortogonalmente alla $T\alpha^{II}$ i punti: A – B – C – D. Individuare sul PV la seconda proiezione del quadrato A-B-C-D.

5 – Proiezione sul piano orizzontale

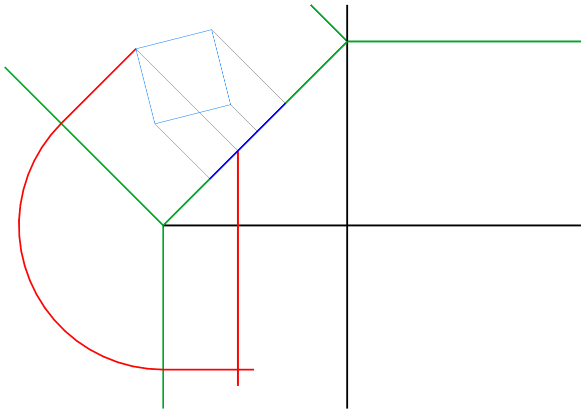
Determinare la prima proiezione sul PO nell'intersezione fra raggi del PV ortogonali alla LT e i raggi del piano α ortogonali alla $T\alpha^{I}$: A – B – C – D.

6 – Proiezione sul piano laterale

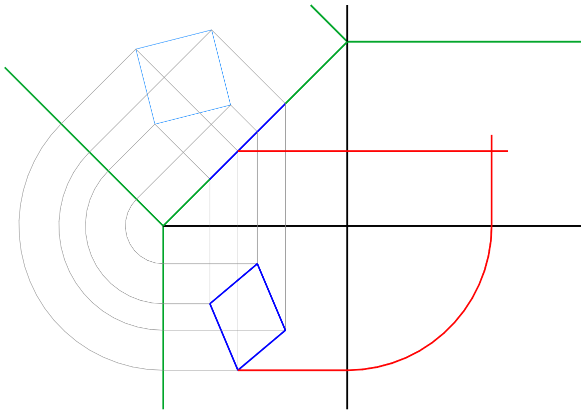
Determinare la terza proiezione sul PL nell'intersezione fra raggi del PV ortogonali alla traccia del PL e i raggi del PO ortogonali alla LT: A – B – C – D.



La particolare posizione del quadrato, ortogonale al piano verticale e inclinato rispetto ai piani orizzontale e laterale, non permette una diretta rappresentazione della figura sui piani principali. Non essendo esplicitata alcuna condizione di parallelismo abbiamo la necessità di impostarne una simulata su un altro piano di proiezione. Possiamo a tal fine immaginare α, piano d'appartenenza del quadrato, con le relative tracce $T\alpha^{I}$, $T\alpha^{II}$ e $T\alpha^{III}$. Si ipotizza a questo punto il ribaltamento del piano α sul piano verticale, intorno alla cerniera $T\alpha^{II}$. Creata la condizione di parallelismo si procede alla rappresentazione del quadrato ABCD in vera forma sul piano α e, ricordando che "i punti ruotano secondo piani ortogonali alla cerniera", alla successiva proiezione dei punti ortogonalmente a $T\alpha^{II}$.



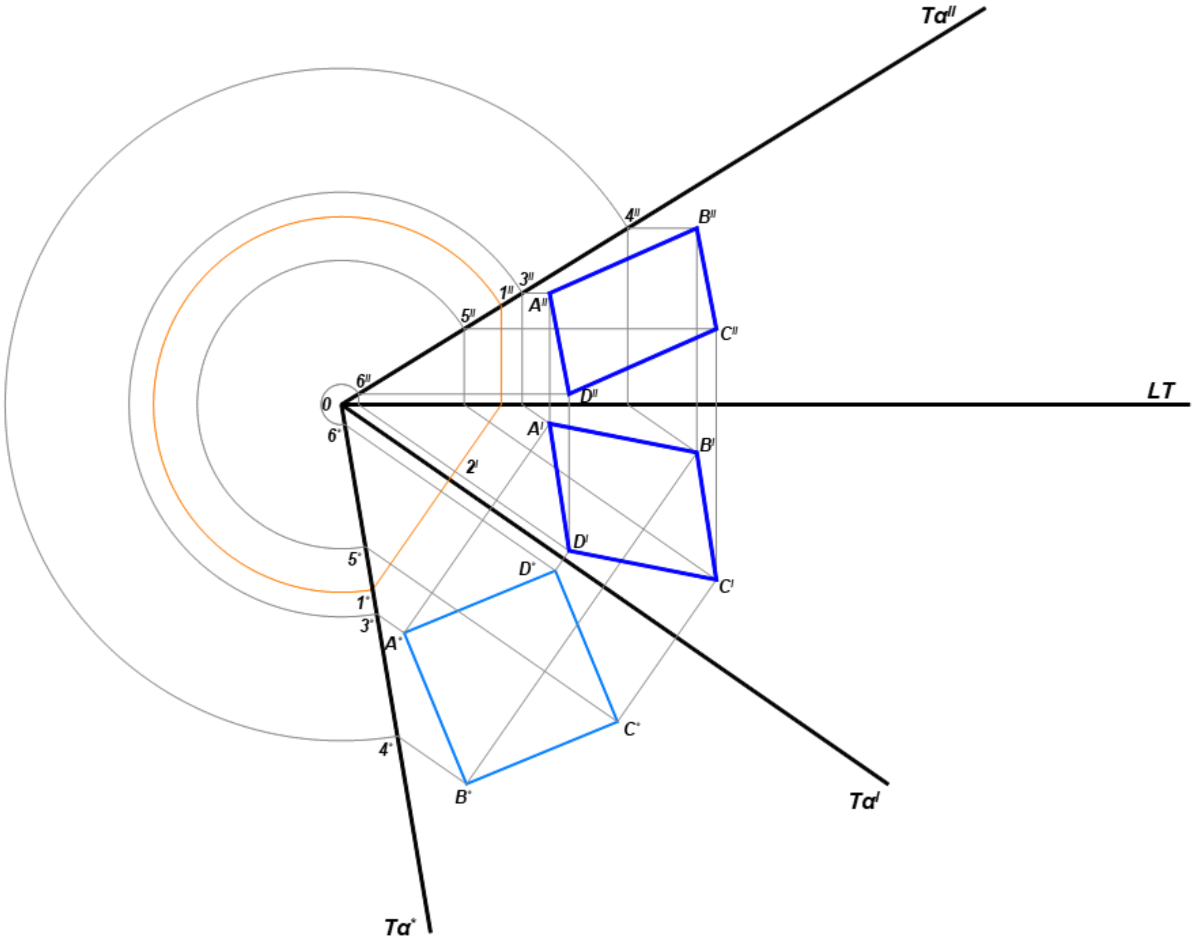
Determinato il segmento proiezione del quadrato ABCD sul piano verticale si passa alla proiezione sul piano orizzontale. I punti in prima proiezione saranno determinati dall'intersezione dei raggi proiettanti provenienti dal piano verticale con i raggi provenienti dal piano ribaltato α. I punti del piano α saranno dapprima proiettati ortogonalmente alla $T\alpha^{I*}$, e successivamente, poiché "i punti ruotano mantenendo inalterata la loro distanza dalla cerniera", riportati con il compasso dal punto di intersezione di $T\alpha^{II}$ con la linea di terra. Nel punto di intersezione fra gli archi e la $T\alpha^{I}$, si tracceranno i raggi proiettanti ortogonali alla $T\alpha^{I}$, fino ad intercettare il raggio proiettante ortogonale proveniente dal piano verticale. Unendo i punti consecutivi si ottiene il quadrilatero ABCD proiezione sul piano orizzontale.



Intercettare sul piano laterale i raggi proiettanti ortogonali provenienti dal piano orizzontale e dal piano verticale. Sul terzo piano di proiezione, unendo i punti consecutivi, si determina la proiezione del quadrilatero ABCD.

Per rappresentare in vera forma e grandezza una figura piana vista in scorcio nelle proiezioni ortogonali, è necessario individuare il relativo piano d'appartenenza.

Proiezioni ortogonali | Figure piane



Proiezione ortogonale di un quadrato appartenente ad un piano α genericamente inclinato

1 – Impostazione del piano d'appartenenza α

Tracciare la linea di terra LT.

Partendo dall'estremo 0 tracciare la $T\alpha^{I}$. Partendo dall'estremo 0 tracciare la $T\alpha^{II}$.

2 – Ribaltamento del piano d'appartenenza α

Individuare 1^{II} sulla $T\alpha^{II}$, proiettarlo sulla LT e successivamente proiettare tale intersezione ortogonalmente alla $T\alpha^{I}$ determinando 2^{I}.

Tracciare l'arco di centro 0 e raggio $0\text{-}1^{II}$ e determinare 1* sulla perpendicolare per 2^{I}.

Tracciare $T\alpha^{*}$ passante per 0 e 1*.

3 – Proiezione di ABCD sul piano α

Tracciare il quadrato ABCD, oggettivo, sul piano α.

4 – Proiezione dei punti A-B-C-D su PO e PV

Proiettare A* ortogonalmente a $T\alpha^{I}$ sul PO. Proiettare A* parallelamente a $T\alpha^{I}$ fino ad intercettare $T\alpha^{*}$ nel punto 3*.

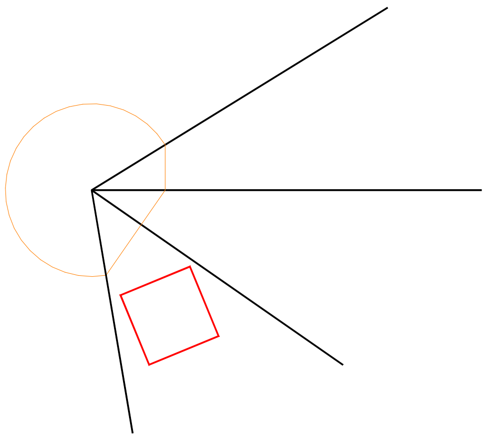
Con centro 0 tracciare l'arco di raggio 0-3* e determinare 3^{II} su $T\alpha^{II}$.

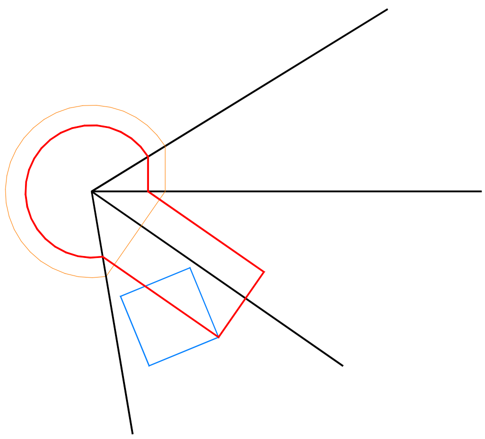
Tracciare il raggio orizzontale passante per 3^{II}. Tracciare il raggio verticale passante per 3^{II} fino ad intercettare la LT.

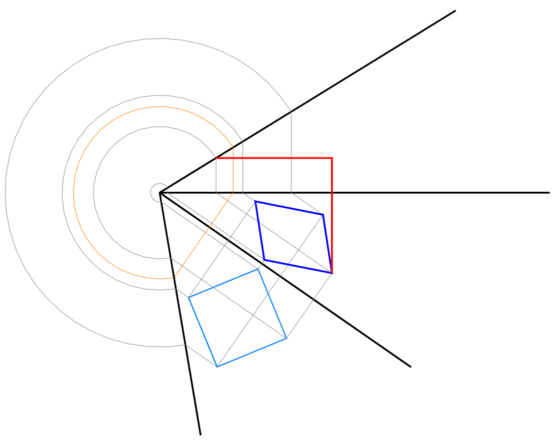
Dall'intersezione con la LT tracciare il raggio con direzione $T\alpha^{I}$ e determinare A^{I}.

Tracciare il raggio proiettante passante per A^{I} e determinare A^{II} sul raggio orizzontale passante per 3^{II}.

Procedere in modo analogo per quanto riguarda i punti B, C e D. Unire i punti e determinare le proiezioni del quadrato A-B-C-D su PO e PV.





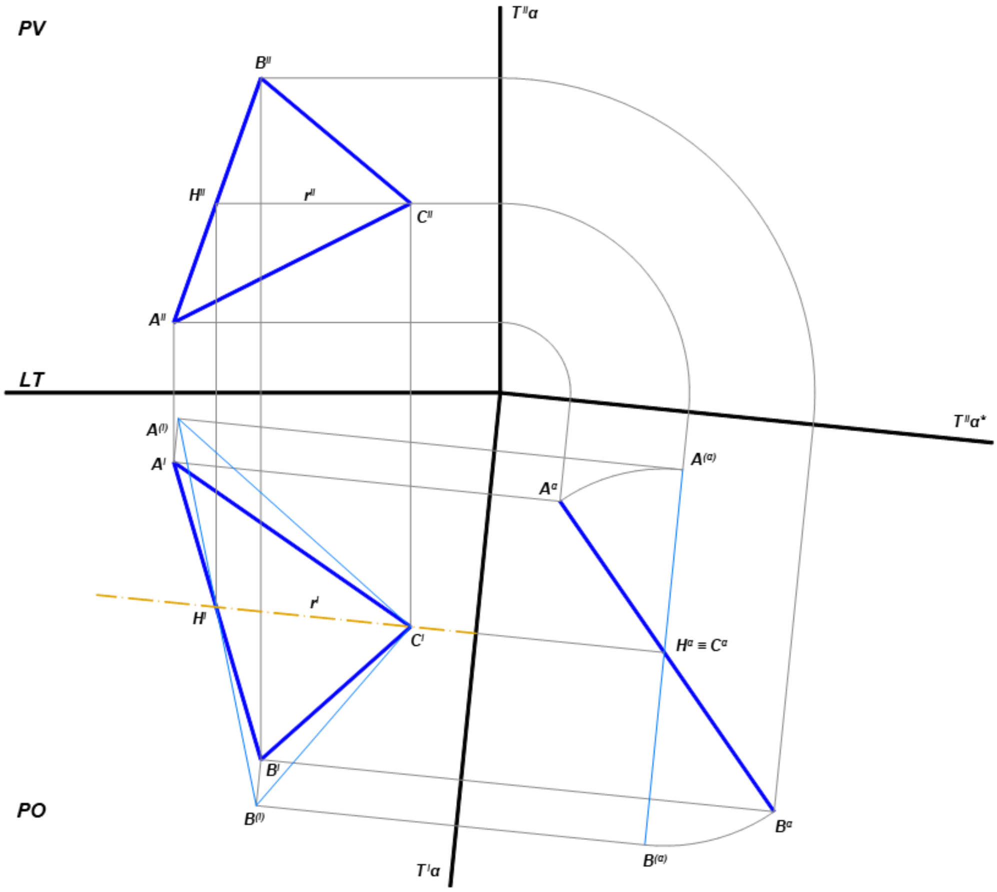


In questo esercizio il quadrato ABCD appartiene ad un piano α generico del quale sono note le tracce $T\alpha^{I}$ e $T\alpha^{II}$. Per determinare la doppia proiezione si rende quindi necessario impostare il ribaltamento del piano α su uno dei piani principali. Scegliamo di ribaltare α intorno alla cerniera di rotazione $T\alpha^{I}$, individuando a piacere il punto 1 sulla $T\alpha^{II}$, traccia del piano α sul piano verticale. Poiché il punto 1 si trova sul piano verticale manterrà inalterata la sua distanza da 0 intersezione di α con la linea di terra. Per determinare il ribaltamento di 01 sul piano orizzontale, riportiamo con il compasso un arco di centro 0 e raggio 01. Poiché il punto 1 mantiene durante la rotazione la stessa distanza dalla cerniera esso si troverà necessariamente in un punto dell'arco. L'altra condizione che si applica per la determinazione del ribaltamento del piano α intorno a $T\alpha^{I}$, è la rotazione dei punti secondo piani ortogonali alla cerniera. Si procederà quindi alla proiezione del punto 1^{II} sul piano orizzontale (ovvero sulla LT) e alla sua successiva proiezione ortogonalmente alla $T\alpha^{I}$, fino all'intersezione con l'arco di centro 0 e raggio 01. La retta passante per 0 e per 1*, rappresenta Tα*, ribaltamento della $T\alpha^{II}$ sul piano orizzontale. Sarà a questo punto possibile rappresentare oggettivamente, in vera forma, il quadrato ABCD sul piano α ribaltato sul piano orizzontale.

Per determinare la prima proiezione di un punto del quadrato si procederà tenendo conto che i punti ruotano mantenendo inalterata la distanza dalla cerniera e che la stessa rotazione avviene secondo piani ortogonali alla cerniera. La linea mista evidenzia chiaramente il percorso proiettivo da applicare a tutti i punti della figura in vera forma.

La proiezione sul piano verticale sarà data dall'intersezione fra il raggio ortogonale alla linea di terra proveniente dal piano orizzontale e il raggio parallelo al piano orizzontale alla stessa quota del punto riportata sulla $T\alpha^{II}$.

Proiezioni ortogonali | Figure piane



Proiezione ortogonale di un triangolo scaleno inclinato con determinazione della vera forma

1 – Proiezioni sui piani Orizzontale e Verticale

Tracciare la linea di terra LT e determinare i piani principali di proiezione PO e PV. Individuare a piacere le proiezioni di A, B e C sul PO. Proiettare ortogonalmente sul PV e fissare a piacere la distanza delle proiezioni dalla LT.

2 – Impostazione dell'asse di rotazione r

Tracciare la $T^{II}\alpha$ del piano ausiliario α ortogonale alla LT. Impostare r asse orizzontale di rotazione sul triangolo passante per il punto C e determinare H sul lato AB. Proiettare H sul PO. Tracciare sul PO l'asse di rotazione r passante per HC.

3 – Ribaltamento del piano ausiliario α

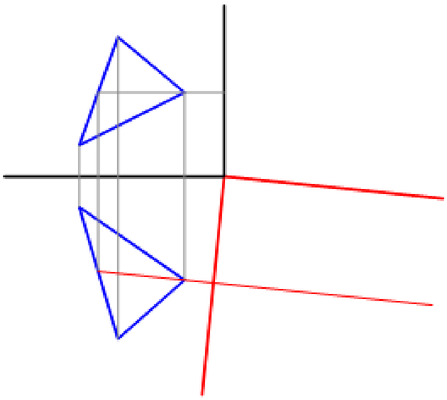
Tracciare $T^{I}\alpha$ ortogonalmente rispetto all'asse di rotazione r^{I}. Ribaltare $T^{II}\alpha$ ortogonalmente rispetto alla $T^{I}\alpha$ sul PO.

4 – Proiezione sul piano ausiliario α

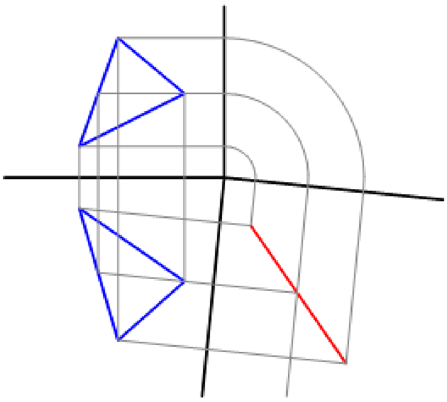
Proiettare sul piano α: A, B, e C. Se la proiezione dei punti è corretta "**A^{α} C^{α} B^{α} DEVONO ESSERE ALLINEATI**".

5 – Determinazione della vera forma del triangolo ABC

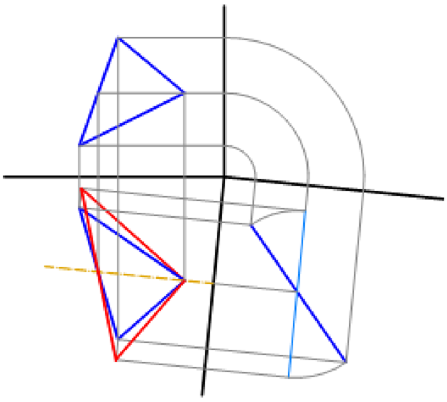
Impostazione dell'asse di rotazione. Ruotare i punti A^{α} e B^{α} posizionando il triangolo parallelamente al PO ($T^{I}\alpha$). Proiettare con direzione r^{I} il punto $A^{(\alpha)}$ e intersecare con il raggio ortogonale a r^{I} passante per A^{I}: $A^{(I)}$. Proiettare con direzione r^{I} il punto $B^{(\alpha)}$ e intersecare con il raggio ortogonale a r^{I} passante per B^{I}: $B^{(I)}$. Unire $A^{(I)}$ $B^{(I)}$. **LA PROIEZIONE $A^{(I)}$ $B^{(I)}$ PASSA PER H^{I}**. Unire $B^{(I)}$ C^{I} e C^{I} $A^{(I)}$. $A^{(I)}$ $B^{(I)}$ C^{I} rappresenta il triangolo ABC oggettivo (In vera forma) parallelo al PO.



Il triangolo ABC, scaleno e genericamente inclinato rispetto ai piani principali, è proiettato in forma scorciata e di conseguenza l'immagine proiettata non corrisponde alla sua vera forma. La determinazione della forma oggettiva passa anche in questo caso attraverso la definizione di un piano ausiliario, opportunamente definito, su cui proiettare la figura. Si ipotizza a tal fine una cerniera di rotazione orizzontale passante per un vertice del triangolo, C nel nostro caso, che intercetta il lato opposto AB nel punto H. Dopo avere riportato sul piano orizzontale la direzione della cerniera passante per CH, si imposta un piano ausiliario ortogonale al piano orizzontale, con la $T^{II}\alpha$ ortogonale alla linea di terra e $T^{I}\alpha$ ortogonale alla cerniera CH. Si passa quindi a ribaltare sul piano orizzontale il piano ausiliario α ipotizzando una rotazione rispetto alla $T^{I}\alpha$. A conclusione del ribaltamento la $T^{I}\alpha$ dovrà formare un angolo retto con la $T^{II}\alpha$*.



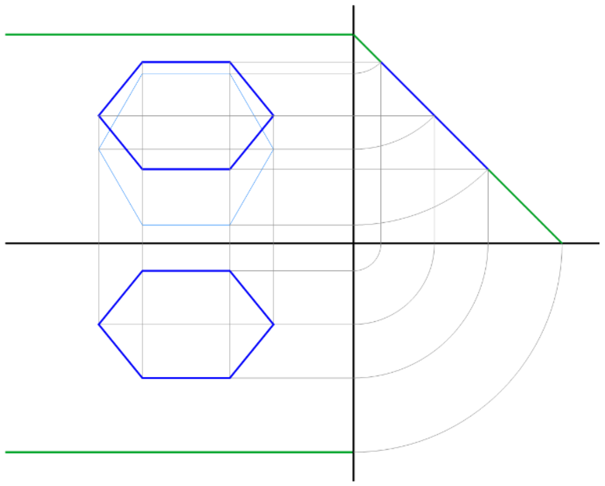
Si procederà a questo punto alla proiezione sul piano ausiliario α, dei punti A e B ortogonalmente rispetto alla $T^{I}\alpha$. La proiezione del triangolo sul piano α, data la sua condizione di ortogonalità rispetto a tale piano, sarà rappresentata dai tre punti allineati A – C – B.



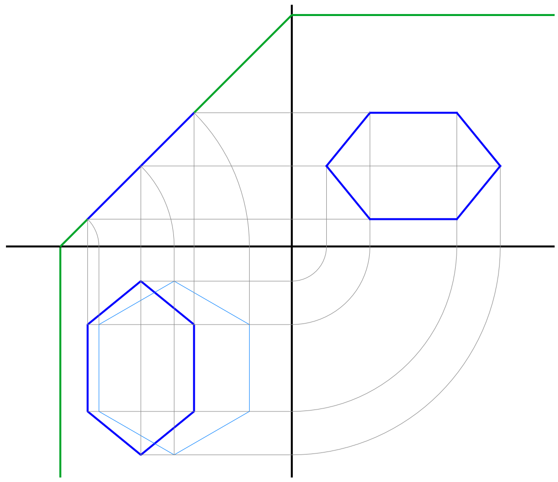
Per rappresentare il triangolo ABC nella sua vera forma, parallelamente al piano orizzontale, si procede nel modo seguente. Tracciare sul piano α la direzione orizzontale, parallela quindi alla $T^{I}\alpha$, passante per la cerniera CH. Poiché i punti ruotano mantenendo inalterata la distanza dalla cerniera, facendo centro sulla cerniera nel piano α, riportare i punti A e B sulla direzione orizzontale. Proiettare i punti così ottenuti sul piano orizzontale ortogonalmente alla $T^{I}\alpha$ e determinare l'intersezione, nel piano orizzontale, con i raggi proiettanti passanti per i punti in prima proiezione ortogonalmente alla cerniera. Tali intersezioni, unite consecutivamente, definiscono il triangolo ABC rappresentato oggettivamente in vera forma.

In mancanza di condizioni di parallelismo fra retta, segmento o figura piana e quadro, si fa ricorso all'utilizzo di piani definiti non a caso ausiliari, che opportunamente individuati e ribaltati, determineranno le condizioni da cui partire per definire le varie proiezioni ortogonali.

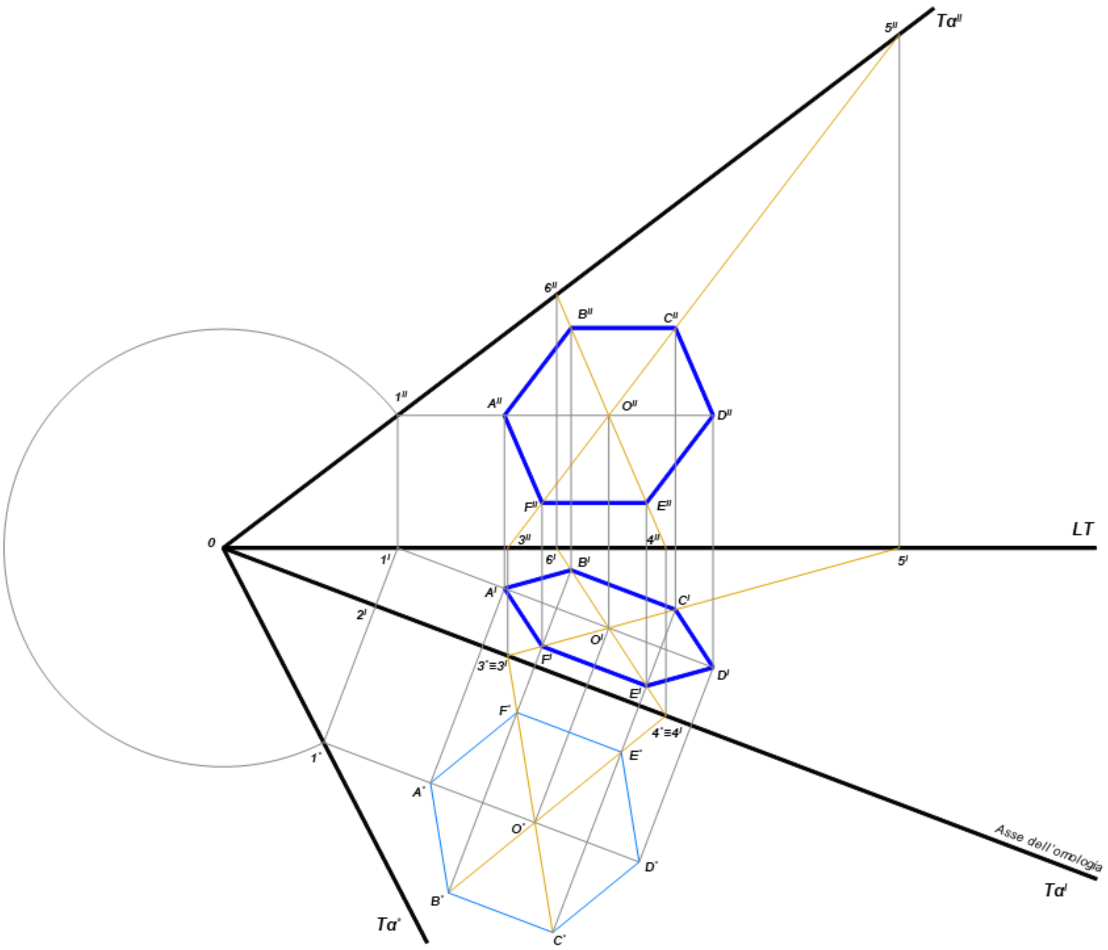
Proiezioni ortogonali | Figure piane | Approfondimenti



Esagono ortogonale al piano laterale e inclinato rispetto al piano orizzontale e verticale.
(Ribaltamento della base sul PV)

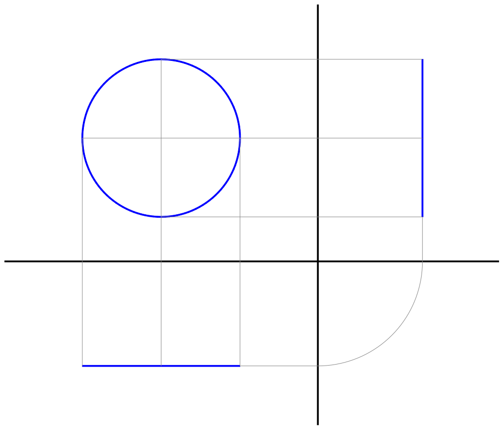


Esagono ortogonale al piano verticale e inclinato rispetto al piano orizzontale e laterale.
(Ribaltamento della base sul PO)

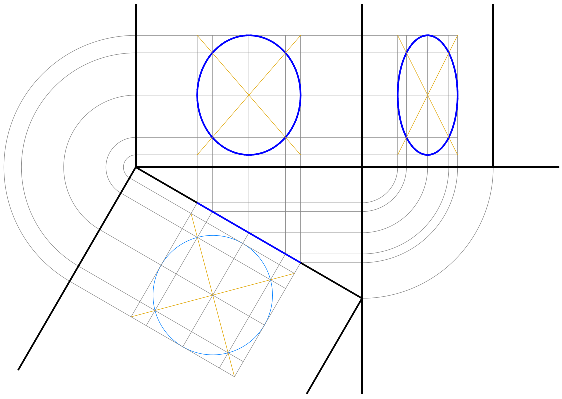


Esagono appartenente ad un piano inclinato. Soluzione omologica.

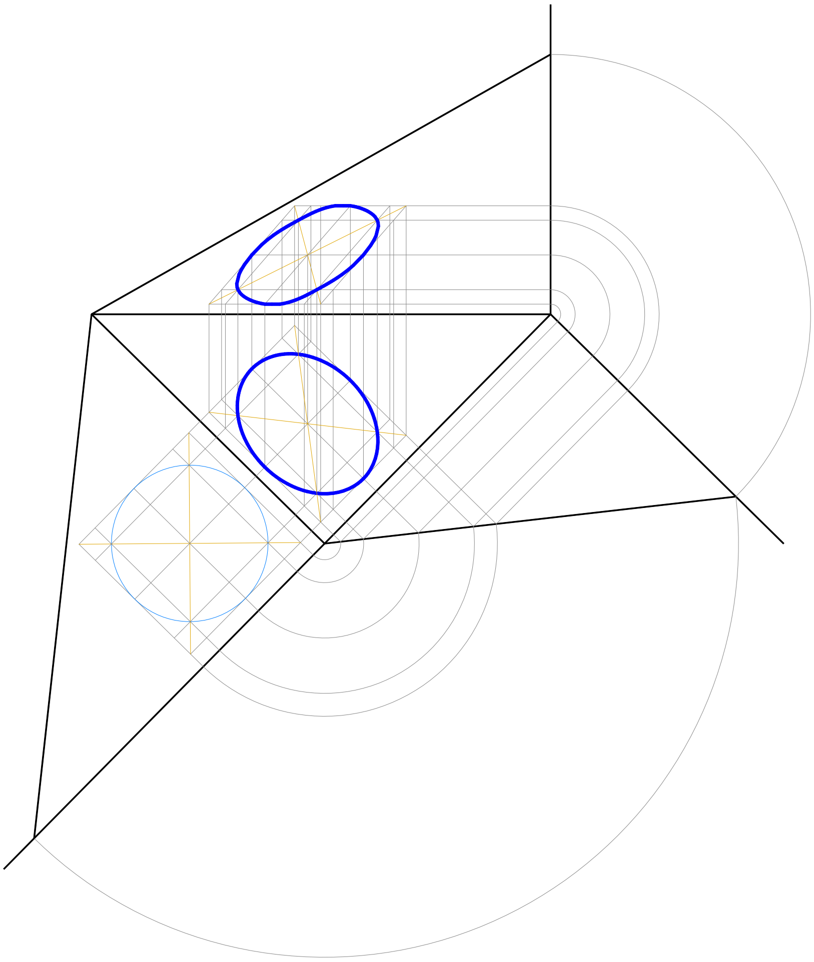
La condizione d'appartenenza delle rette passanti per gli spigoli FC e BE, con il piano α, permette di individuare la proiezione dell'esagono partendo dal ribaltamento dell'esagono sul piano α. L'esercizio mette in evidenza la relazione omologica fra il piano α ribaltato e il piano orizzontale, con la traccia Tα' con funzione di asse dell'omologia.



Proiezione ortogonale di una circonferenza parallela al PV.



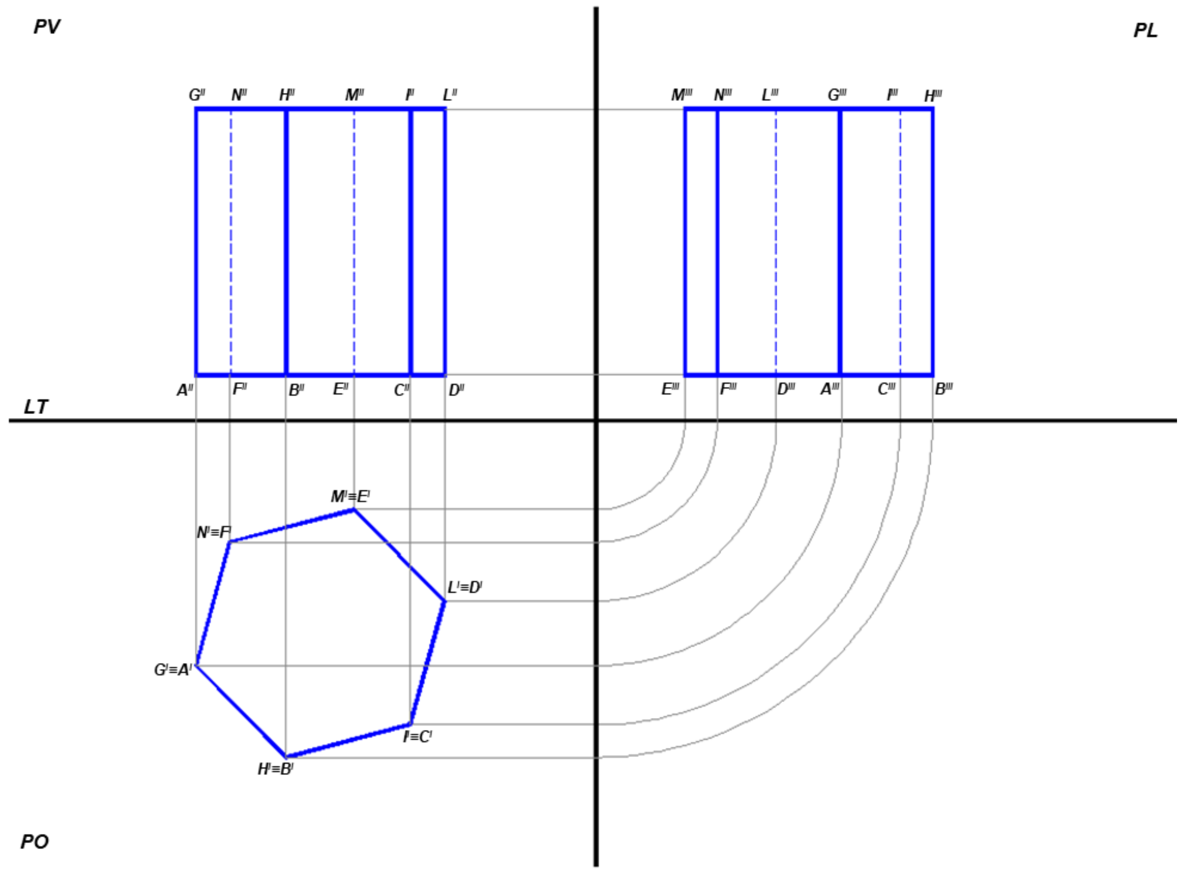
Proiezione ortogonale di una circonferenza ortogonale al PO e inclinata di 30° e 60° rispetto al PV e PL



Cerchio appartenente ad un piano inclinato.

Sul piano d'appartenenza α, dopo aver inscritto il cerchio all'interno di un quadrato, tracciare le diagonali. Tracciare successivamente, oltre alle mediane, le parallele ai lati del quadrato passanti per le intersezioni della circonferenza con le diagonali. Proiettare gli otto punti della circonferenza sui piani tenendo conto che per quanto riguarda il ribaltamento dei piani "*i punti ruotano per piani ortogonali alla cerniera*" e di conseguenza ortogonalmente alle tracce dei piani come riportato nell'esempio.

Proiezioni ortogonali | Solidi



Proiezione ortogonale di un prisma con la base esagonale parallela al piano orizzontale.

1 – Impostazione

Tracciare la linea di terra LT.

Tracciare la retta verticale ortogonale a LT e individuare i piani principali di proiezione PO, PV e PL.

2 – Rappresentazione del prisma sul PO.

Tracciare l’esagono di base del prisma, inserire le lettere corrispondenti ai punti, tenendo conto che risulta a vista la base superiore.

3 – Proiezione sul PV

Proiettare ortogonalmente alla LT tutti i punti della proiezione sul PO: G-A, N-F, H-B, M-E, I-C e L-D. Tracciare il raggio proiettante parallelo alla LT all’altezza della base inferiore del prisma. Successivamente tracciare il raggio proiettante parallelo alla LT all’altezza della base superiore del prisma. Evidenziare il contorno esterno della proiezione sul PV: G-A-D-L. Individuare gli spigoli a vista H-B e I-C. Individuare gli spigoli nascosti N-F e M-E.

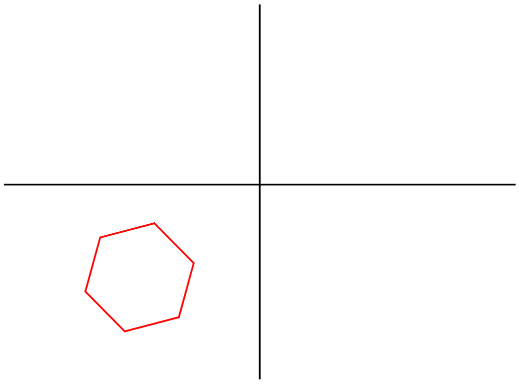
4 – Proiezione sul PL

Proiettare ortogonalmente al PL tutti i punti della proiezione sul PO: M-E, N-F, L-D, G-A, I-C e H-B.

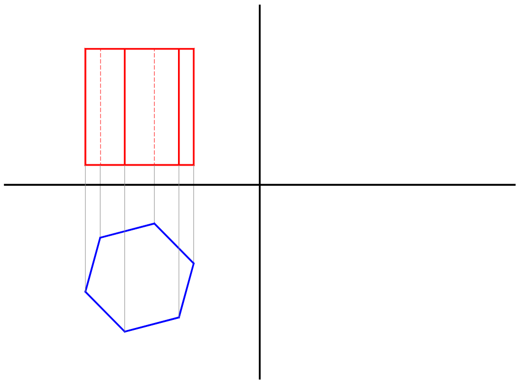
Tracciare l’arco e riportare sulla LT i punti: M-E, N-F, L-D, G-A, I-C e H-B.

Tracciare nell’intersezione con la LT i raggi ortogonali passanti per i punti: M-E, N-F, L-D, G-A, I-C e H-B.

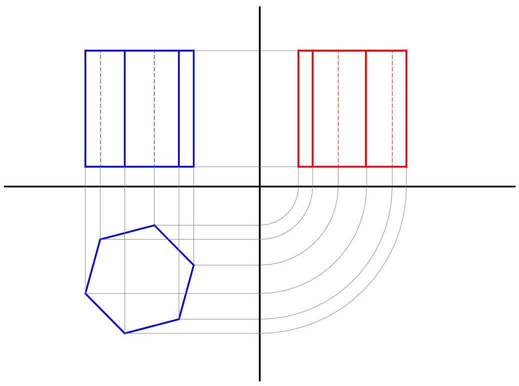
Evidenziare il contorno esterno della proiezione sul PL: M-E-B-H. Individuare gli spigoli a vista N-F e G-A. Individuare gli spigoli nascosti L-D e I-C.



Per la proiezione ortogonale di un solido è bene partire dalla verifica della sua posizione in relazione ai piani principali, poiché solo in condizioni di parallelismo sarà possibile, come già verificato per le proiezioni delle figure piane, rappresentare tali parti della proiezione oggettivamente, ovvero in vera forma con misure lineari e angolari congruenti alle corrispondenti parti del solido. In questo caso il prisma ha le basi esagonali parallele al piano orizzontale e conseguentemente potranno essere rappresentate oggettivamente sul medesimo piano. La sovrapposizione delle due basi, superiore e inferiore, determina la rappresentazione di entrambe in un unico esagono nei vertici del quale coincidono quindi due punti. La posizione della base ruotata rispetto ai piani orizzontale e laterale permette, evitando la coincidenza degli spigoli laterali sui piani, di rappresentare ogni singolo elemento del prisma. Ricordiamo che il simbolo di coincidenza $G^I \equiv A^I$ indica che il raggio proiettante ortogonale al piano orizzontale incontra prima il vertice G della base superiore del prisma e a seguire il vertice A della base inferiore.

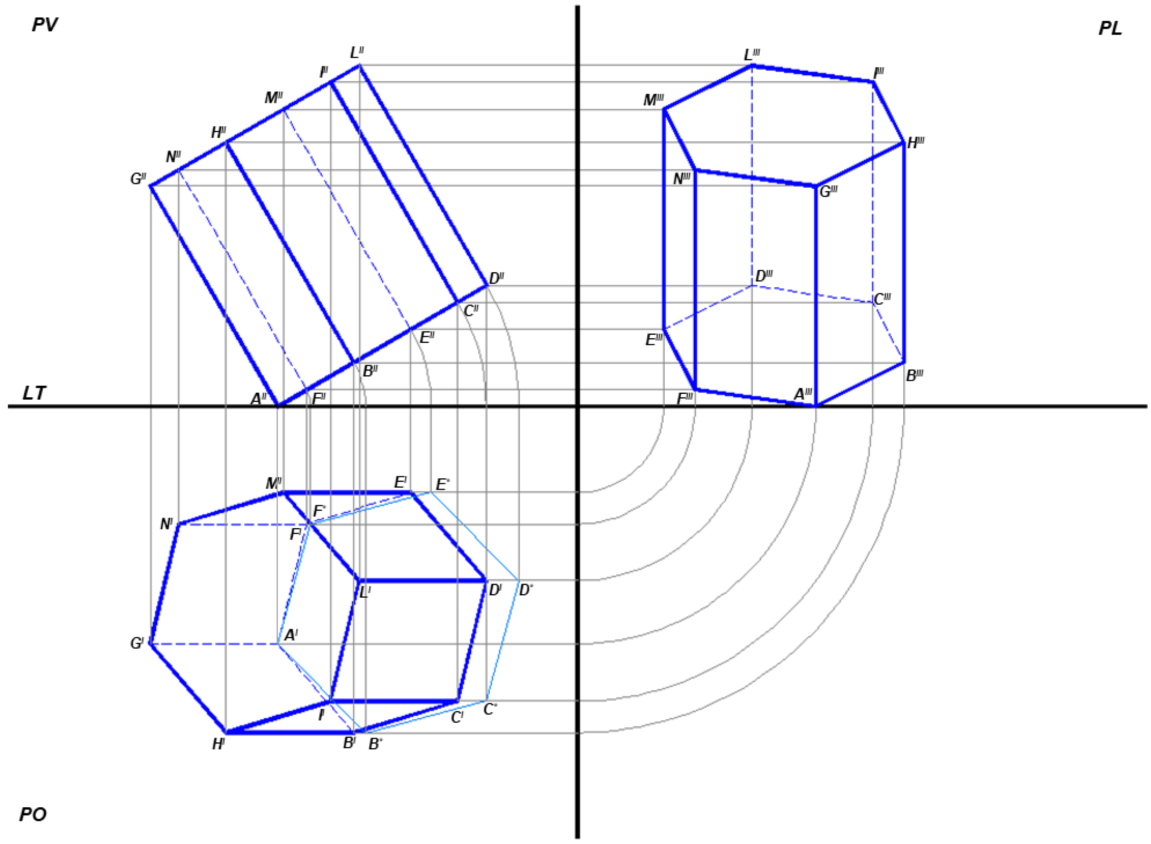


Proiettare a seguire i sei punti della prima proiezione ortogonalmente sul piano verticale. Gli spigoli laterali esterni, corrispondenti all'altezza del prisma, potranno essere rappresentati sui piani verticale e laterale con le loro misure oggettive poiché paralleli a tali piani. Sarà quindi sufficiente, nella definizione dell'immagine sul piano verticale, tracciare due raggi proiettanti orizzontali alle quote delle due basi e individuare le intersezioni con i raggi proiettanti provenienti dal piano orizzontale.



Per rappresentare le parti a vista e le eventuali parti nascoste sul piano verticale si procederà ripassando a vista oltre al contorno esterno della proiezione, tutte le parti interne della proiezione direttamente intercettate dai raggi proiettanti. Gli spigoli non direttamente toccati dai raggi proiettanti rappresentati sul piano orizzontale con direzione ortogonale al piano verticale, e perciò nascosti in seconda proiezione, saranno rappresentati con segno di linea tratteggiata di spessore pari alla metà delle parti a vista. Analogamente, dopo avere riportato con il compasso i raggi ortogonali al piano laterale, si procederà per la determinazione dell'immagine in terza proiezione.

Proiezioni ortogonali | Solidi



Prisma con asse parallelo al piano verticale e base esagonale inclinata di 30° al piano orizzontale

1 – Impostazione

Tracciare la linea di terra LT. Tracciare la retta verticale ortogonale a LT e individuare i piani principali di proiezione PO, PV e PL.

2 – La base inferiore sul PO

Tracciare sul PO l'esagono di base A^{I} B* C* D* E* F* di misure oggettive. Proiettare i punti ortogonalmente alla LT. Tracciare nell'intersezione sulla LT del raggio proiettante passante per A una retta inclinata di 30°. Riportare col compasso puntando su A^{II} gli archi fino all'intersezione con la retta inclinata individuando:
F^{II} – B^{II} – E^{II} – C^{II} - D^{II}. Determinare la prima proiezione nell'intersezione fra il raggio proiettante della proiezione sul PV e il raggio ortogonale alla cerniera passante per la base ribaltata: B^{I} – C^{I} – D^{I} – E^{I} – F^{I}

3 – La proiezione sul PV

Tracciare sul PV, la retta d'appartenenza della base superiore alla distanza, dalla base inferiore, pari all'altezza del prisma. Tracciare sul PV le proiezioni degli spigoli laterali: A-G D-L F-N B-H E-M C-I. Ripassare gli spigoli esterni A-D-L-G e gli spigoli interni a vista B-H e C-I. Ripassare gli spigoli interni nascosti della figura: F-N e E-M.

4 – La base superiore sul PO

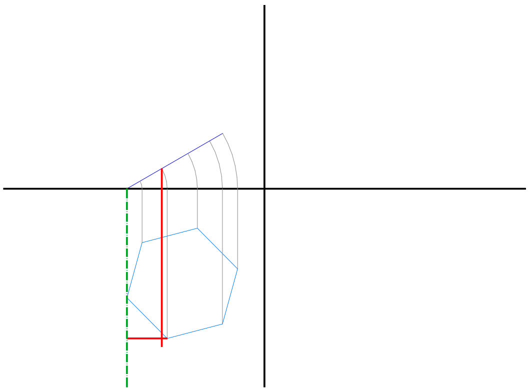
Determinare la prima proiezione nell'intersezione fra il raggio proiettante della proiezione sul PV e il raggio ortogonale alla cerniera (linea verde) passante per la base inferiore sul PO: H^{I} - I^{I} - L^{I} - M^{I} - N^{I} - G^{I} . Unire gli spigoli.

5 – Completamento della proiezione sul PO

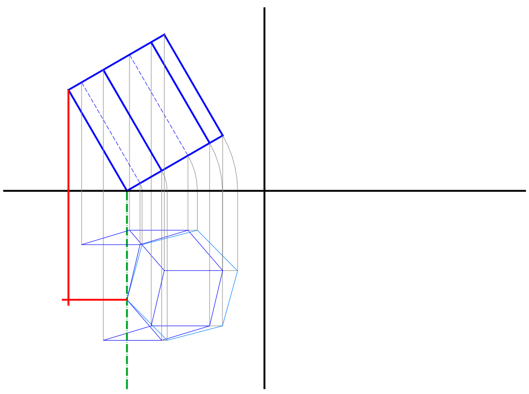
Ripassare il contorno esterno della figura. Ripassare le parti a vista interne della figura. Ripassare le parti nascoste all'interno della figura.

6 – Proiezione sul PL e completamento

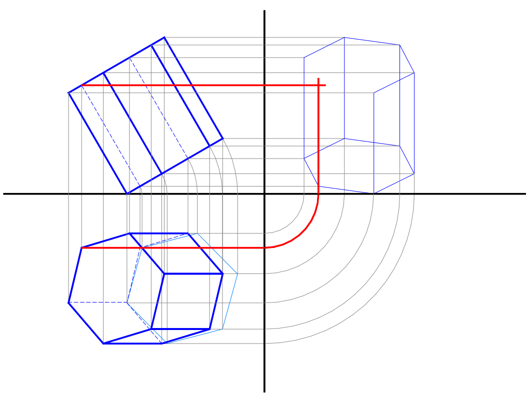
Determinare l'intersezione fra i raggi proiettanti provenienti dal PO e dal PV: A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N.
Ripassare il contorno esterno della figura, le parti a vista interne della figura e le parti nascoste all'interno della figura.



Il prisma a base esagonale inclinata di 30° rispetto al piano orizzontale, mantiene la condizione di parallelismo degli spigoli laterali rispetto al piano verticale. Un vertice della base inferiore coincide con il piano orizzontale. Date la posizione del solido e le condizioni proiettive gli spigoli laterali si proietteranno con le dimensioni oggettive solamente sul piano verticale mentre le basi esagonali si presenteranno scorciate sui piani orizzontale e laterale. Dopo avere rappresentato oggettivamente l'esagono sul piano orizzontale, procederemo alla impostazione di una cerniera ortogonale al piano verticale passante per il vertice coincidente con il piano orizzontale e successivamente tracceremo, inclinandola di 30° la retta d'appartenenza della proiezione della base sul piano verticale. Tenendo conto che i punti ruotano mantenendo la stessa distanza dalla cerniera, si determinerà la seconda proiezione della base inferiore riportando sulla retta inclinata le intersezioni dei raggi proiettanti sulla linea di terra. Determinare in seguito la prima proiezione della base nell'intersezione fra i raggi proiettanti passanti per il piano verticale e i raggi ortogonali passanti per l'esagono oggettivo e ortogonali alla cerniera.



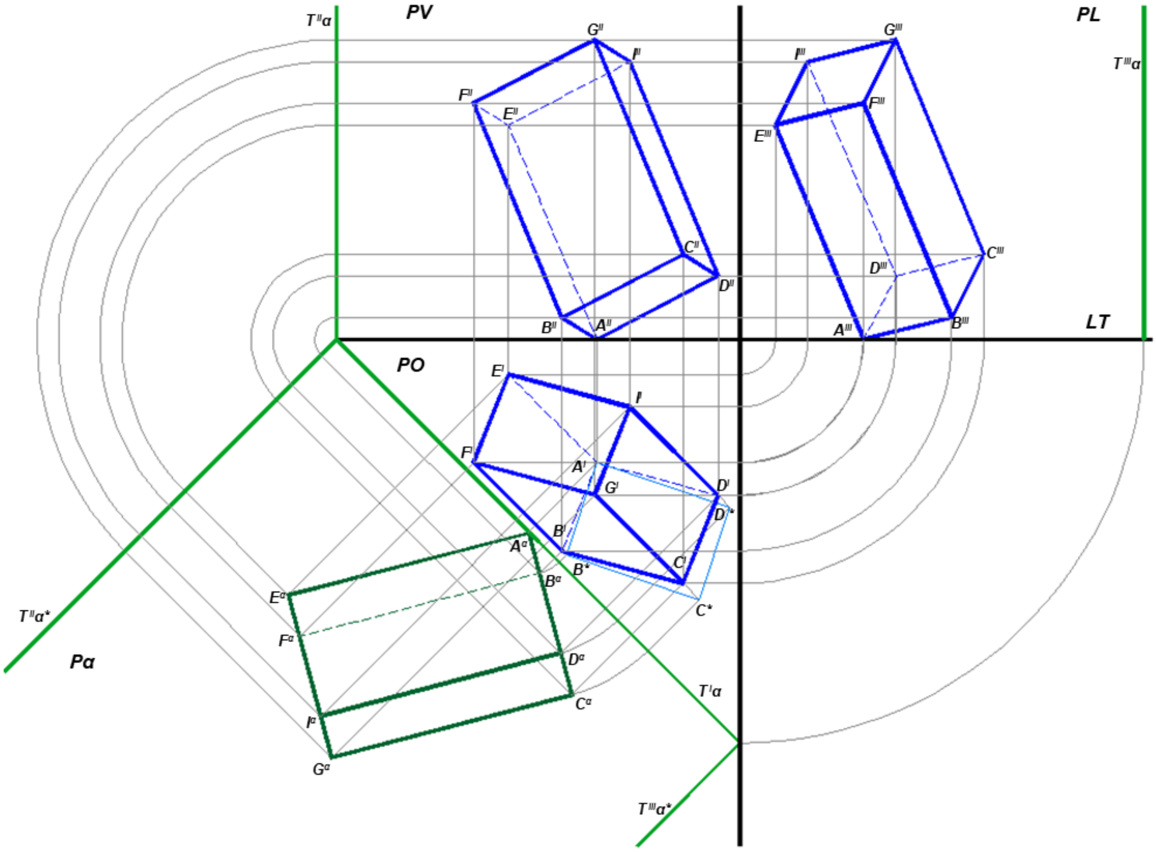
Gli spigoli laterali manterranno, nella seconda proiezione, la condizione di ortogonalità rispetto alla base. Potranno quindi date le direzioni ortogonali alla retta inclinata di 30° essere rappresentate in misura oggettiva. Le due basi del prisma manterranno fra loro la condizione di parallelismo e l'ortogonalità rispetto al piano verticale.



La proiezione sul piano laterale non presenta elementi di novità rispetto agli esercizi precedenti. È comunque bene ricordare che per la determinazione delle parti nascoste si deve tenere conto della direzione dei raggi proiettanti ortogonali al piano laterale.

È fondamentale verificare le condizioni di appartenenza degli elementi fra loro.
In particolare:
1. un punto appartiene ad una retta se le proiezioni del punto appartengono alle rispettive proiezioni della retta.
2. una retta appartiene ad un piano se le sue tracce appartengono alle rispettive tracce del piano.
3. un punto appartiene ad un piano se appartiene ad una retta appartenente anch'essa al piano.

Proiezioni ortogonali | Solidi



Parallelepipedo con l'asse inclinato di 60° rispetto al PO e parallelo ad un piano α ortogonale al PO e inclinato di 45° sia al PV che al PL. ***(Metodo dei piani ausiliari)***

1 - Impostazione dei piani di proiezione: Impostare il piano α: $T^{I}\alpha$, $T^{II}\alpha$, $T^{II}\alpha^*$, $T^{III}\alpha^*$, $T^{III}\alpha$.

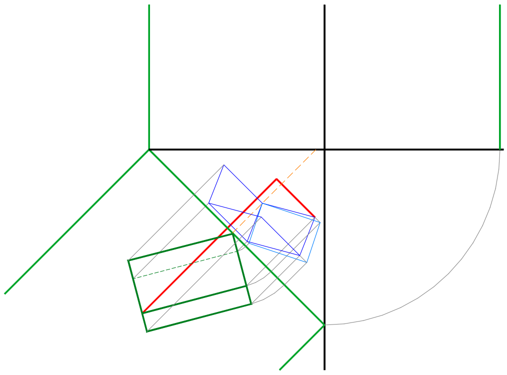
2 - Schema delle proiezioni: Proiettare i punti ortogonalmente ai piani di proiezione, secondo le direzioni indicate nello schema.

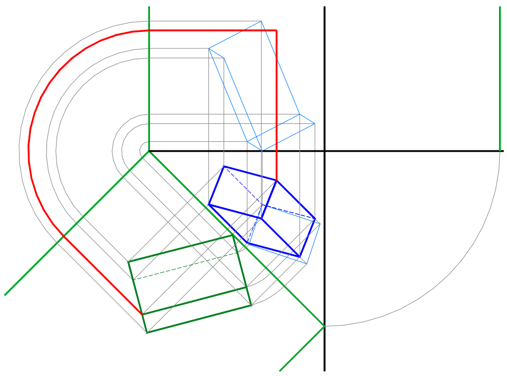
3 - Proiezione sul piano ausiliario: Rappresentare in posizione generica la base ABCD sul PO mantenendo le dimensioni reali. Proiettare il punto A sul piano ausiliario α. Tracciare su α la retta d'appartenenza della base. Proiettare la base ortogonalmente alla $T^{I}\alpha$, e successivamente puntando in A^{α} ruotare fino ad intercettare la retta inclinata: B^{α}, D^{α}, C^{α}. Tracciare la retta d'appartenenza della base superiore parallela a quella inferiore (ABCD) alla distanza pari all'altezza del solido. Tracciare, ortogonalmente alle basi, gli spigoli: AE, CG, BF, DI. Ripassare a vista il contorno esterno della figura: EACG. Ripassare a vista le parti interne della figura: DI. Ripassare le parti nascoste della figura: F

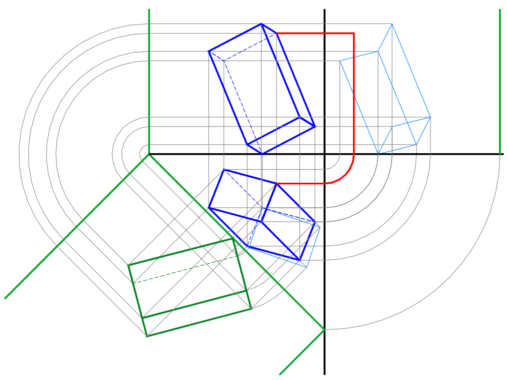
4 - Proiezione sul piano orizzontale: impostare la cerniera di rotazione ortogonalmente a $T^{I}\alpha$ e passante per A^{I}. Proiettare la base ortogonalmente alla cerniera di rotazione e dal piano ausiliario ortogonalmente alla $T^{I}\alpha$. Ripassare con segno di linea a vista il contorno esterno della figura. Ripassare le parti interne a vista della figura. Ripassare le parti interne nascoste della figura.

5 - Proiezione sul piano verticale: Proiettare i punti della figura sul PO ortogonalmente alla LT e i punti della figura sul piano ausiliario secondo le direzioni rosse esemplificate nello schema delle proiezioni presentato nella pagina a lato. Ripassare con segno di linea a vista il contorno esterno della figura. Ripassare le parti interne a vista della figura. Ripassare le parti interne nascoste della figura.

6 - Proiezione sul piano laterale: Proiettare ortogonalmente i punti delle figure sul PO e sul PV. Ripassare con segno di linea a vista il contorno esterno della figura. Ripassare le parti interne a vista della figura. Ripassare le parti interne nascoste della figura.







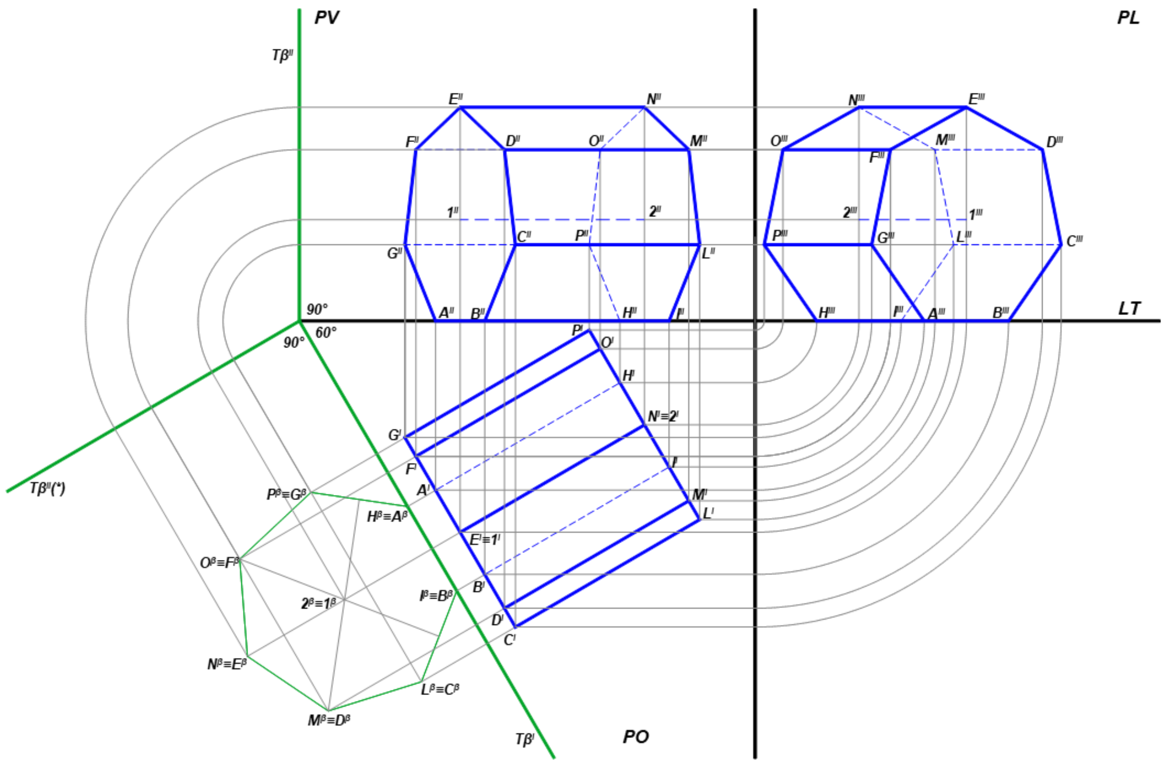
Il metodo dei piani ausiliari viene utilizzato in tutte le situazioni proiettive in cui gli elementi dell'oggetto, in genere ma non necessariamente un solido, si trovano in posizione casuale rispetto ai piani principali di proiezione. Tenendo conto che è possibile rappresentare direttamente gli elementi di base (segmenti, figure piane) solo quando questi si trovano in condizione di parallelismo o coincidenza rispetto ai piani di proiezione, si rende necessario l'utilizzo di un ulteriore piano di proiezione, detto appunto ausiliario che opportunamente definito permette di rappresentarvi le proiezioni del solido genericamente, ma univocamente, posizionato. Il metodo, pur nelle diversificate situazioni proiettive, si basa sulle quattro norme fondamentali che regolano la rotazione dei piani già citate in precedenti esercizi. Oltre a queste regole basilari è altrettanto importante tracciare i raggi proiettanti sempre ortogonalmente ai piani di proiezione, siano essi principali (PO, PV e PL) oppure generici o virtuali come il caso dei piani ausiliari.

Impostare il piano ausiliario attraverso la determinazione delle sue tracce: $T^{I}\alpha$, inclinata di 45° rispetto alla LT e al piano laterale; $T^{II}\alpha$ e $T^{III}\alpha$, ortogonali alla LT; $T^{II}\alpha^*$ e $T^{III}\alpha^*$ ribaltamento delle omonime tracce sul piano orizzontale, ortogonali rispetto alla $T^{I}\alpha$. Dopo avere tracciato la base inferiore in vera forma sul piano orizzontale si proietta sul piano ausiliario α inclinando la retta d'appartenenza di 30° come specificato nel testo. Proiettare sul piano ausiliario la base rappresentata sul piano orizzontale in vera forma e riportare sulla retta inclinata alla stessa distanza dalla cerniera, passante in questo caso nel vertice della base coincidente con il piano orizzontale. L'intersezione fra i raggi proiettanti provenienti dal piano ausiliario e i raggi ortogonali alla cerniera di rotazione determina i punti in prima proiezione.

La seconda proiezione segue un percorso più articolato ma pur sempre all'interno della stessa metodologia applicata nei passaggi precedenti. Proiettare l'immagine del piano ausiliario ortogonalmente alla $T^{II}\alpha^*$ e riportare l'intersezione con il compasso alla stessa distanza sul piano verticale. Successivamente determinare nell'intersezione con i raggi ortogonali provenienti dal piano orizzontale la seconda proiezione.

Date la prima e seconda proiezione del solido, resta invariata la metodologia per determinare la terza proiezione sul piano laterale.

Proiezioni ortogonali | Solidi



Proiezione ortogonale di un prisma a base ettagonale con asse parallelo al piano orizzontale e inclinato di 30°al piano verticale

1 – Impostazione dei piani di proiezione

Tracciare la linea di terra LT. Impostare la direzione dell'asse del prisma, parallelo al PO e inclinato di 30° rispetto al PV. Ortogonalmente rispetto all'asse del prisma tracciare il piano ausiliario β ortogonale al PO e inclinato di 60° rispetto al PV. Ribaltare la $T\beta^{II}$ sul PO.

2 – Proiezione sul Piano Ausiliario

Rappresentare la proiezione della base ettagonale sul piano β ribaltato.

3 – Proiezione sul Piano Orizzontale

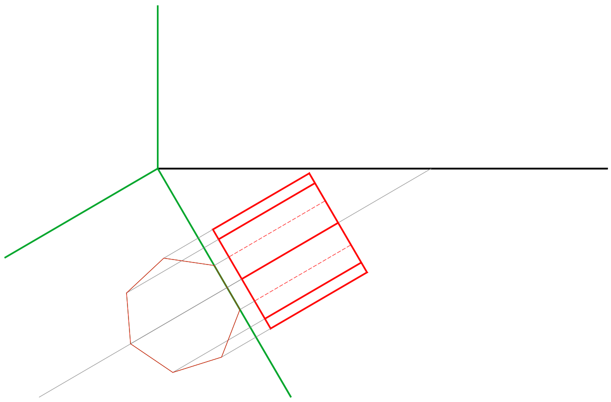
Proiettare ortogonalmente alla $T\beta^{I}$ i vertici dell'ettagono di base. Tracciare due direzioni parallele alla $T\beta^{I}$, alla distanza pari all'altezza del prisma. Unire due vertici con il punto medio del lato opposto e determinare la posizione dell'asse sul piano β. Ripassare il contorno della proiezione sul PO. Ripassare le parti a vista interne al contorno. Ripassare con segno di linea tratteggiata le parti nascoste del prisma.

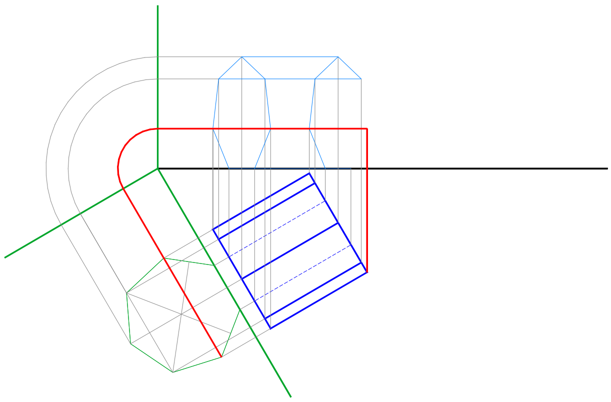
4 – Proiezione sul Piano Verticale

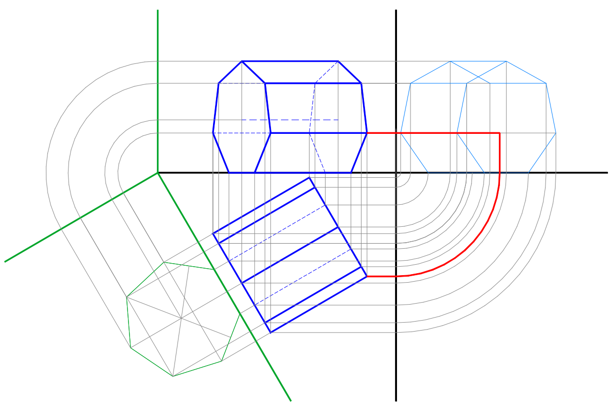
Proiettare i punti della figura sul PO ortogonalmente alla LT e i punti della figura sul piano ausiliario secondo le direzioni rosse esemplificate nella seconda delle sequenze proposte a lato: A-B-G-F-E-D-C e I-H-P-O-N-M-L. Ripassare a vista il contorno della proiezione sul PV. Ripassare le parti a vista interne. Ripassare con segno di linea tratteggiata le parti nascoste della proiezione. Proiettare dal piano ausiliario β l'asse 1-2.

5 – Proiezione sul Piano Laterale

Impostare ortogonalmente alla LT, la traccia del PL. Proiettare dal PO e dal PV ortogonalmente al PL i punti:
A-B-C-D-E-F-G e I-H-P-O-N-M-L. Ripassare a vista il contorno della proiezione sul PL. Ripassare le parti a vista interne alla proiezione. Ripassare con segno di linea tratteggiata le parti nascoste della proiezione.
Proiettare dal PO e dal PV l'asse 1-2.





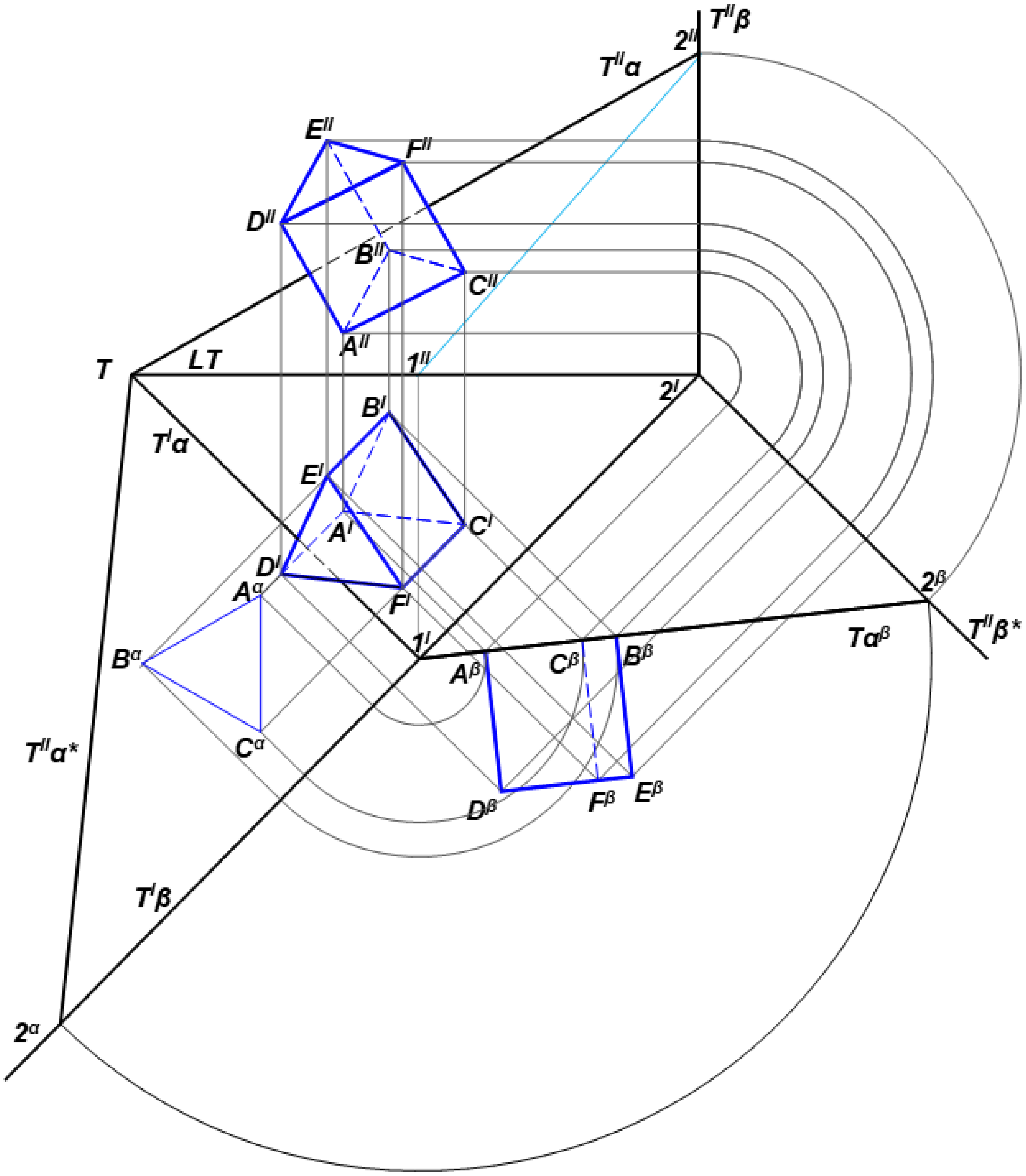


Il prisma a base ettagonale presenta l'asse e gli spigoli laterali paralleli al piano orizzontale. Una faccia laterale del prisma coincide con il piano orizzontale, mentre le due basi si presentano ortogonali al piano orizzontale e inclinate di 60° rispetto al piano verticale. L'inclinazione rispetto ai piani verticale e laterale delle parti del prisma non permette la loro diretta rappresentazione sui medesimi piani. Si rende quindi necessario anche in questo caso il ricorso ad un piano ausiliario, ortogonale al piano orizzontale e parallelo alla base del prisma. Anche se corretta dal punto di vista metodologico, si ritiene preferibile non far coincidere il piano ausiliario con la base poiché ciò determinerebbe l'unione delle proiezioni sul piano orizzontale e ausiliario rendendo meno leggibile l'esito grafico finale. Rappresentare quindi la prima traccia del piano ausiliario parallelamente alla base del prisma e angolandola conseguentemente di 60° rispetto alla linea di terra. La seconda traccia, ma anche la terza nel caso si potesse determinare, poiché il piano ausiliario è ortogonale al piano orizzontale, sarà ortogonale alla linea di terra. Dopo avere ribaltato il piano ausiliario sul piano orizzontale sarà possibile rappresentare l'ettagono di base in vera forma e misure lineari e angolari oggettive. Proiettando i punti della base ortogonalmente rispetto alla $T\beta^{I}$ sul PO, si ottengono le rette d'appartenenza degli spigoli laterali i quali essendo paralleli rispetto al piano orizzontale potranno, su di esso, essere rappresentati oggettivamente. Le due basi, delimitanti gli spigoli laterali, saranno rispetto a questi ortogonali.

La determinazione della proiezione sul piano verticale seguirà la stessa metodologia applicata nell'esercizio precedente. Proiettare l'immagine della base ettagonale sul piano ausiliario ortogonalmente alla $T\beta^{III(*)}$, riportare l'intersezione con il compasso alla stessa distanza sul piano verticale e in seguito determinare nell'intersezione con i raggi ortogonali provenienti dal piano orizzontale la seconda proiezione.

Resta invariata la metodologia per determinare la terza proiezione sul piano laterale. Tenere conto delle direzioni ortogonali dei raggi proiettanti rispetto ai piani di proiezione per definire le parti a vista e nascoste. Le parti a vista saranno quelle direttamente "toccate" dai raggi mentre tutte le parti del prisma non direttamente intercettate dai raggi saranno nascoste e rappresentate con segno di linea tratteggiata e spessore pari alla metà delle parti a vista.

Proiezioni ortogonali | Solidi



Proiezione ortogonale di un prisma a base triangolare appoggiato ad un piano inclinato α

1 – Il piano inclinato α

Tracciare la linea di terra LT. Impostare il piano α: tracciare la $T^{II}\alpha$, inclinata di 30° rispetto alla LT. Tracciare la $T^{I}\alpha$, inclinata di 45° rispetto alla LT. Chiameremo T l'intersezione fra Piano α e LT.

2 – Il piano ausiliario β

Tracciare la $T^{II}\beta$ perpendicolarmente alla LT. Tracciare successivamente la $T^{I}\beta$ ortogonalmente alla $T^{I}\alpha$.

3 – Ribaltamento sul PO del piano ausiliario β

Ribaltare la $T^{II}\beta$ sul piano orizzontale. Unire 1^{I} con 2^{β}.

4 – Ribaltamento sul PO del piano α

Puntando il compasso su 1^{I} ribaltare $2^{\beta,}$ sulla $T^{I}\beta$ sul piano orizzontale, determinando 2^{α}. Unire 2^{α} con T.

5 – Schematizzazione della proiezione dei punti

Proiettare i punti dal piano α, ortogonalmente alla $T^{I}\alpha$ e alla $T^{I}\beta$. Ruotare le intersezioni intorno a 1^{I} fino ad intercettare la $T\alpha^{\beta}$. Proiettare i punti sulla $T\alpha^{\beta}$ ortogonalmente alla $T^{I}\beta$ e determinare la proiezione nel PO nell'intersezione con i raggi ortogonali alla $T^{I}\alpha$ tracciati in precedenza. Proiettare i punti del PO ortogonalmente alla linea di terra, LT. Proiettare i punti del piano β ortogonalmente alla $T^{II}\beta$*. Ruotare le intersezioni sulla $T^{II}\beta$*, intorno a 2^{I}, fino ad intercettare la $T^{II}\beta$. Proiettare i punti ortogonalmente alla $T^{II}\beta$ e determinare la proiezione sul PV, nell'intersezione con i raggi ortogonali proiettati dal PO. Otterremo in questo modo quattro proiezioni: PO, PV, Piano α e Piano β.

6 – Retta di massima pendenza

Unire 1^{II} e 2^{II} (Intersezione fra Piano α e Piano β).

7 – Proiezione del prisma sul PO.

Tracciare sul piano α, la base inferiore del prisma, il triangolo ABC. Proiettare i punti dal piano α, ortogonalmente alla $T^{I}\alpha$ e alla $T^{I}\beta$. Ruotare le intersezioni intorno a 1^{I} fino ad intercettare la $T\alpha^{\beta}$. Proiettare i punti sulla $T\alpha^{\beta}$ ortogonalmente alla $T^{I}\beta$ e determinare la proiezione nel PO nell'intersezione con i corrispondenti raggi ortogonali alla $T^{I}\alpha$ tracciati in precedenza. Tracciare il solido giacente sulla traccia $T\alpha^{\beta}$, a partire dalla base ABC, determinando DEF. Individuare la proiezione ABC sul PO. Proiettare i punti DEF sul piano β ortogonalmente alla $T^{I}\beta$. Determinare la proiezione sul PO, nell'intersezione con i corrispondenti raggi ortogonali alla $T^{I}\alpha$ tracciati in precedenza. Ripassare le parti a vista del solido a partire dal contorno della figura. Ripassare le parti nascoste del solido. Individuare le eventuali tracce parzialmente coperte dal solido e rappresentare con segno di linea nascosta.

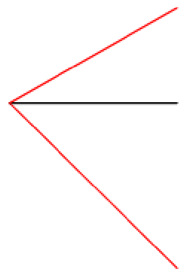
8 – Rappresentazione del prisma sul Piano β.

Ripassare sul piano β le parti a vista del solido a partire dal contorno della figura. Ripassare sul piano β le parti nascoste del solido.

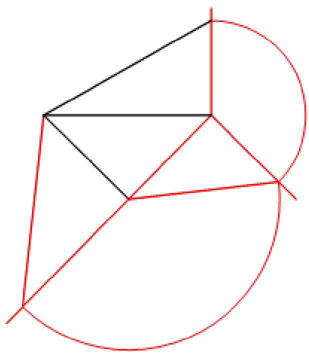
9 – Proiezione del prisma sul PV.

Proiettare i punti del PO, ortogonalmente alla linea di terra, LT. Proiettare i punti del piano β ortogonalmente alla $T^{II}\beta$*. Ruotare le intersezioni sulla $T^{II}\beta$*, intorno a 2^{I}, fino ad intercettare la $T^{II}\beta$. Proiettare i punti ortogonalmente alla $T^{II}\beta$. Determinare la proiezione sul PV, nell'intersezione con i raggi ortogonali proiettati dal PO dei punti ABC della base inferiore e dei punti DEF della base superiore. Unire i vertici AD, BE e CF. Individuare le eventuali tracce parzialmente coperte dal solido e rappresentarle con segno di linea nascosta. Ripassare le parti a vista del solido a partire dal contorno della figura. Ripassare le parti nascoste del solido.

Il prisma a base triangolare è appoggiato ad un piano inclinato le cui tracce $T^{I}\alpha$ e $T^{II}\alpha$ sono inclinate rispetto alla linea di terra di 45° e 30°. In queste condizioni proiettive è evidente che non sarà possibile applicare direttamente alcuna condizione di parallelismo rispetto ai piani principali e sarà quindi necessario ricorrere ad una particolare soluzione applicando il metodo dei piani ausiliari. Al fine di ribaltare il piano α sul piano orizzontale, si costruisce un piano ausiliario β ortogonale sia a α che a β. Il piano β permetterà il ribaltamento del piano α sul piano orizzontale.

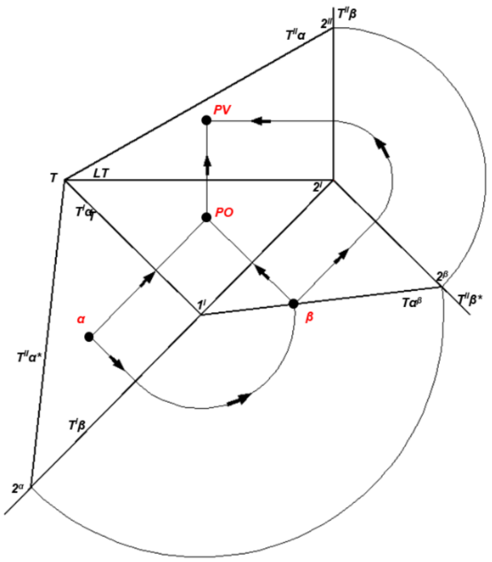


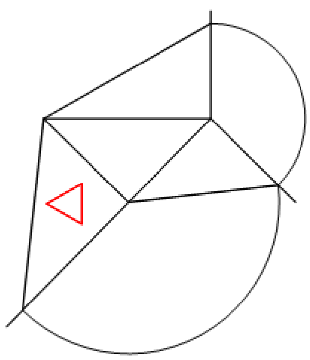
Lo schema proiettivo a lato indica la direzione che i raggi proiettanti devono seguire per la determinazione delle proiezioni sui vari piani. Si evidenzia che a partire dal ribaltamento del piano α i punti saranno sempre proiettati ortogonalmente rispetto alle tracce dei vari piani (se così non fosse si negherebbe il principio su cui si fondano le proiezioni ortogonali). Il ribaltamento dei punti dal piano α al piano β e dal piano β al piano verticale per mezzo di archi, esprime invece la proprietà che i punti ruotano mantenendo la stessa distanza dalla cerniera.

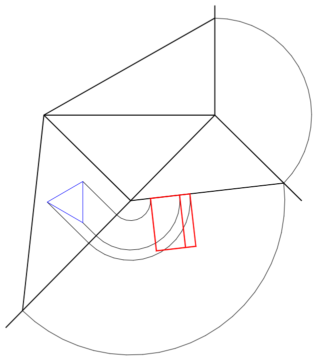


Si procede quindi alla proiezione in vera forma e grandezza della base ABC coincidente con il piano α ribaltato. La posizione della base, se non diversamente specificato, sarà generica. L’unica condizione a cui bisogna attenersi è che tale proiezione sia completamente all’interno della superficie delimitata da $T^{I}\alpha$, $T^{I}\beta$ e dalla $T^{II}\alpha^{*}$.

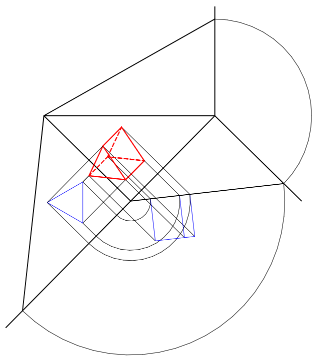
Schema delle proiezioni



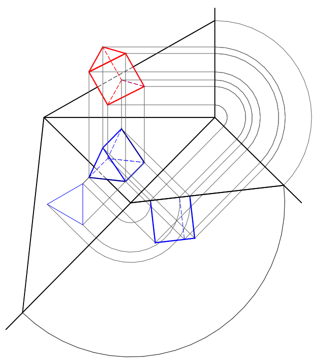




Dopo avere rappresentato la base inferiore del prisma sul piano ribaltato α, si proiettano i punti ortogonalmente sulla $T^{I}\beta$ e successivamente si ribaltano sul piano β facendo perno sulla cerniera 1. Rappresentare le direzioni ortogonali alla $T\alpha^{\beta}$, traccia di α sul piano β, passanti per i punti ABC sul piano β. Tali raggi individuano le rette d'appartenenza degli spigoli laterali del prisma. Per individuare la base superiore, che a scanso di equivoci, risulta nella rappresentazione sul piano β rovesciata rispetto a quella inferiore, sarà sufficiente, essendo nota l'altezza del prisma, tracciare un raggio parallelo alla base inferiore e determinare la base superiore DEF nelle intersezioni con le rette d'appartenenza degli spigoli laterali.

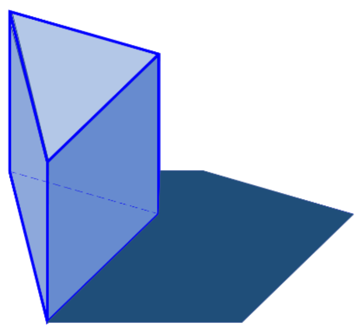


Dalla proiezione sul piano β ortogonalmente alla $T^{I}\beta$ e la proiezione sul piano α ortogonalmente alla $T^{I}\alpha$, si determina la prima proiezione del prisma. Per l'individuazione delle parti nascoste si consideri che essendo ABC la base coincidente con il piano α sarà a partire da essa che si dovranno individuare all'interno del contorno della figura le parti non direttamente individuate dai raggi proiettanti.

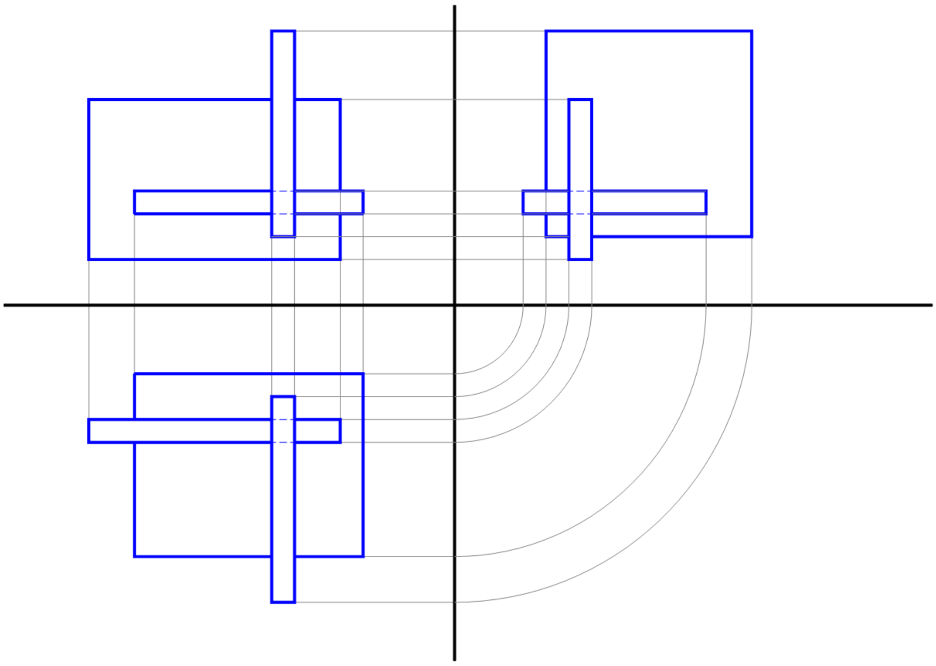


Determinare la proiezione sul piano verticale nell'intersezione fra i raggi proiettanti della figura dal piano orizzontale ortogonalmente alla linea di terra e i raggi proiettanti della figura dal piano β ortogonalmente alla traccia $T^{II}\beta^{*}$, ruotati rispetto a 2^{I} e a seguire riportati orizzontalmente. Per l'individuazione delle parti nascoste tenere conto della direzione dei raggi proiettanti sul piano verticale. Nella stesura grafica definitiva il solido si sovrappone in parte alle tracce sui piani orizzontale e verticale, per cui tali porzioni si dovranno rappresentare con segno di linea tratteggiata.

Vista tridimensionale

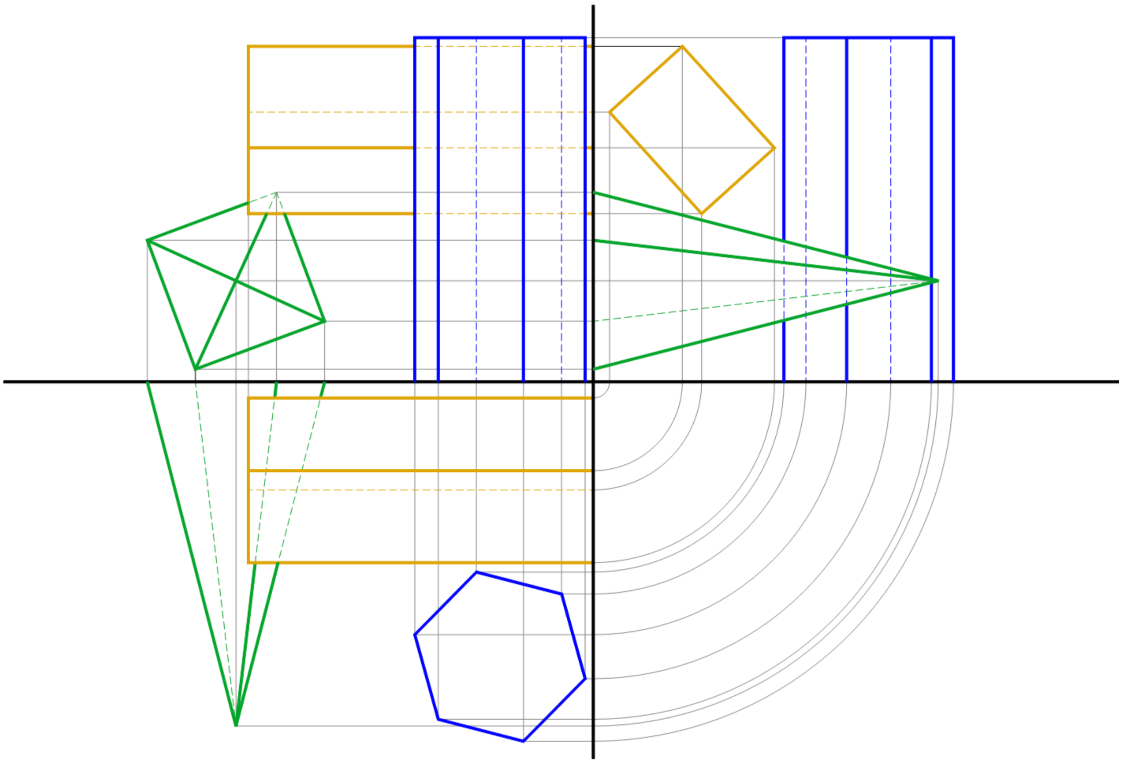


Proiezioni ortogonali | Solidi | Approfondimenti



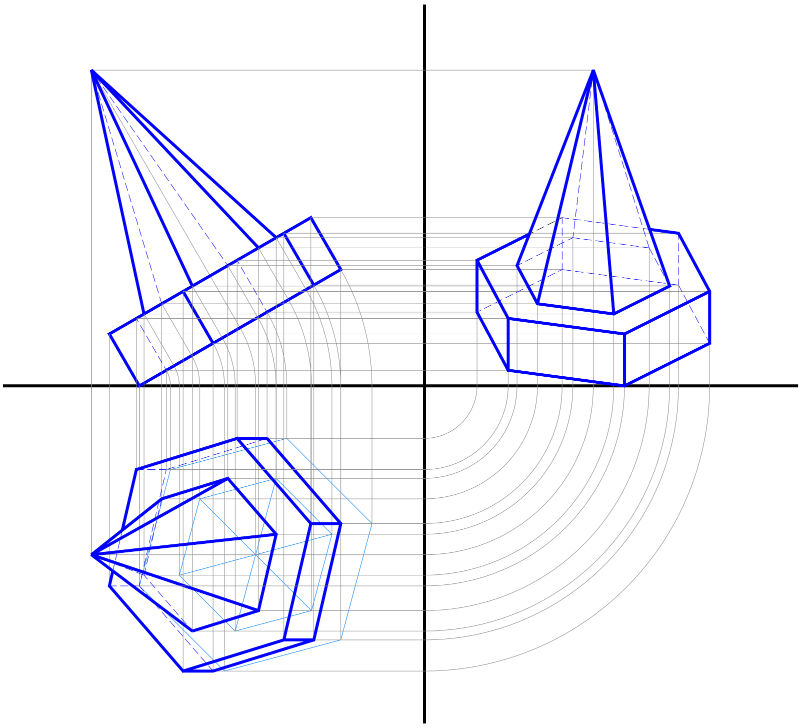
Solido composto

Il solido è determinato dall'intersezione di tre parallelepipedi fra loro ortogonali e con le facce parallele o ortogonali ai piani principali. La posizione, la forma e le condizioni proiettive del solido, permettono di rappresentare in condizione di parallelismo e quindi in vera forma e grandezza tutte le proiezioni del solido nei tre piani principali.



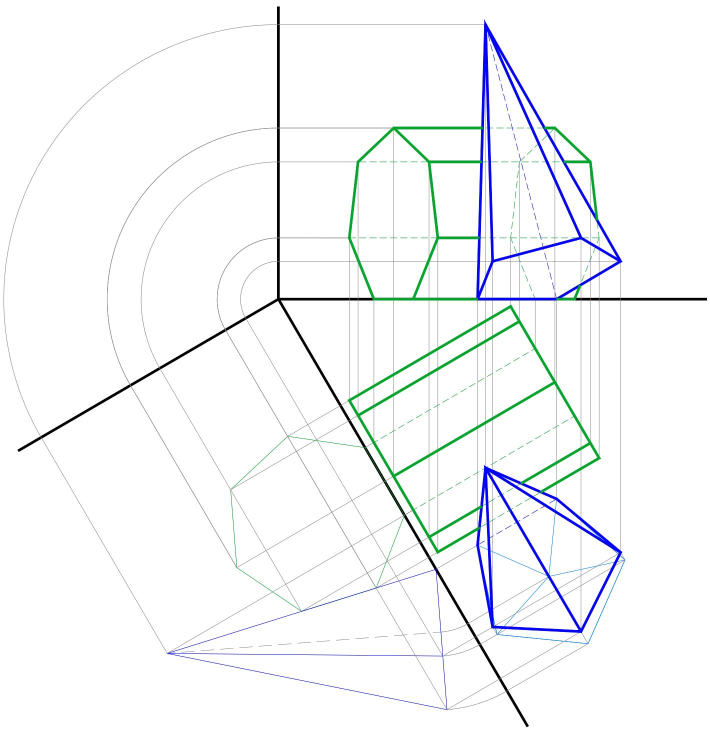
Gruppo di solidi

Prisma a base esagonale, piramide a base quadrata e parallelepipedo con base rettangolare, con le base giacenti rispettivamente sul piano orizzontale (prisma), sul piano verticale (piramide) e sul piano laterale (parallelepipedo).



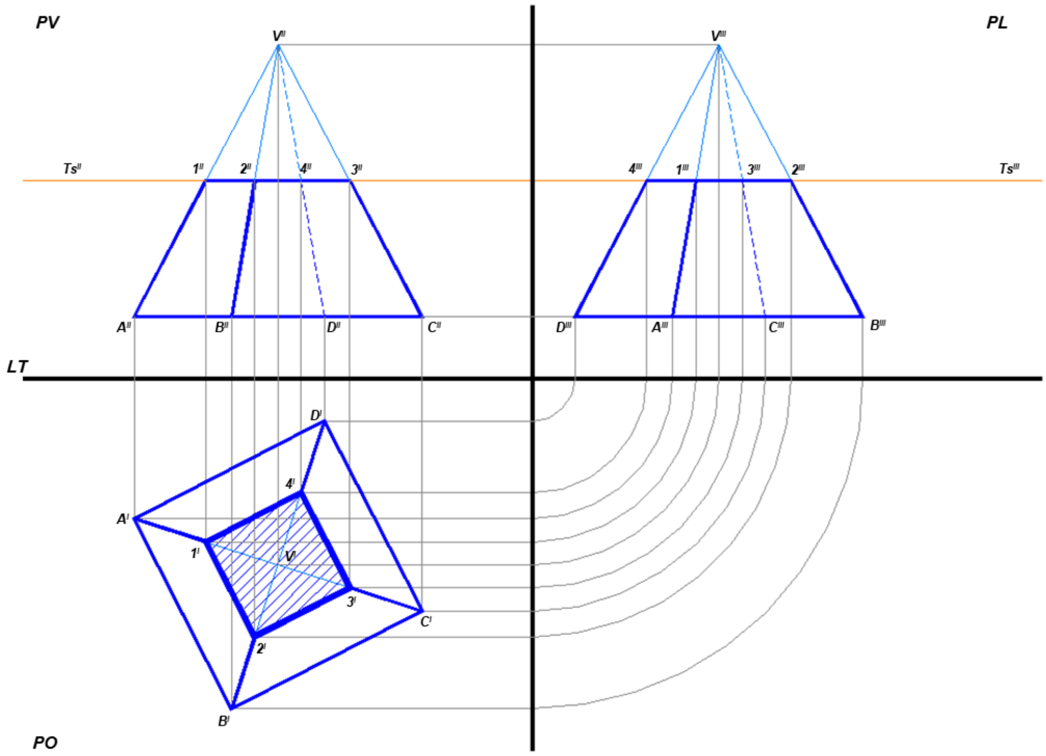
Piramide a base esagonale sovrapposta ad un prisma a base esagonale.

Oltre alla complanarità della base della piramide con la base superiore del prisma, il solido è caratterizzato dal parallelismo fra lati omologhi e dallo stesso baricentro delle basi coincidenti.



Prisma a base ettagonale con asse parallelo al PO e inclinato di 30° rispetto al PV. Piramide a base pentagonale con asse inclinato di 60° rispetto al PO, con una faccia laterale appoggiata ad una faccia laterale del prisma.

Proiezioni ortogonali | Sezioni



Proiezione ortogonale: sezione orizzontale di una piramide a base quadrata

1 – Impostazione della proiezione ortogonale

Tracciare la linea di terra (LT). Tracciare il piano ortogonale e individuare PO, PV e PL.

2 – Proiezione sul PO

Rappresentare, in posizione generica parallela al PO, il quadrato ABCD base della piramide. Tracciare le diagonali BD, AC e individuare nell’intersezione la proiezione del vertice V.

3 – Proiezione sul PV

Tracciare alla quota d dalla LT la retta d’appartenenza della base ABCD. Tracciare alla quota h dalla retta della base, l’altezza del vertice della piramide. Proiettare sulla retta d’appartenenza della base sul PV: A – B – C – D e V ad altezza h. Rappresentare la base ABCD e successivamente tracciare: AV – CV – BV – DV.

4 – Proiezione sul PL

Proiettare sulla retta d’appartenenza della base sul PL: D – A – C – B e V ad altezza h. Rappresentare la base ABCD. Rappresentare: DV – BV – AV – CV.

5 – Impostazione della sezione

Rappresentare Ts^{II} e Ts^{III} tracce del piano di sezione orizzontale ad altezza n rispetto alla LT.

6 – Determinazione dei punti di sezione

Proiettare sul PO le intersezioni del piano di sezione con le proiezioni sul PV e PL:

1 sullo spigolo AV.

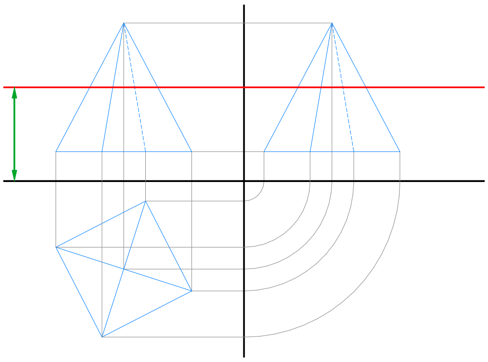
2 sullo spigolo BV.

3 sullo spigolo CV.

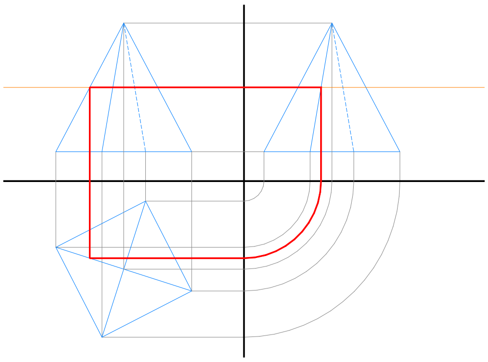
4 sullo spigolo DV.

7 – Completamento grafico

Ripassare il contorno della sezione sul PO (1-2-3-4) con spessore doppio rispetto alle parti a vista. Campire l’area di sezione con tratteggio inclinato di 45°. Ripassare le parti a vista e nascoste delle proiezioni su PO, PV e PL.

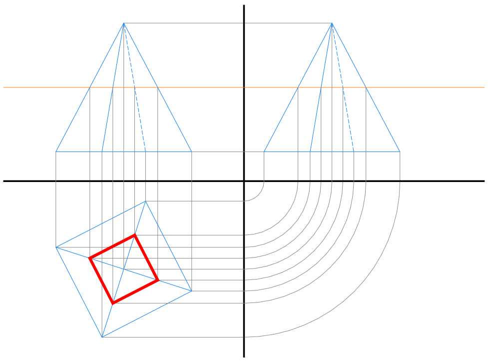


Rappresentare la proiezione ortogonale di una piramide a base quadrata ABCD e vertice V, genericamente ruotata intorno al proprio asse di un angolo α, in modo da non determinare nelle proiezioni sui piani verticale e laterale coincidenze fra i punti della base. Impostare sui piani verticale e laterale il piano di sezione orizzontale, per mezzo delle sue tracce Ts^{II} e Ts^{I} a distanza n dalla linea di terra. Il piano secante divide la piramide in due parti, una superiore comprendente il vertice e una inferiore comprendente la base, che sarà l'oggetto della rappresentazione. Immaginiamo quindi di asportare la parte superiore e rappresentare il tronco di piramide rimanente.



La posizione del piano secante ortogonale ai piani verticale e laterale ci permette di individuare i punti di sezione degli spigoli AV, BV, CV e DV nell'intersezione fra le tracce seconda e terza del piano secante e le proiezioni degli spigoli. Proiettare i punti di sezione dai piani verticale e laterale sul piano orizzontale e determinare nelle corrispondenti proiezioni degli spigoli la sezione sul piano orizzontale. I raggi proiettanti del piano verticale e del piano laterale dovranno, a meno di grossolani errori grafici, incontrarsi nello stesso punto della proiezione sul piano orizzontale. Si consiglia di indicare i punti di sezione con i numeri per poterli individuare più chiaramente rispetto ai punti della figura di base.

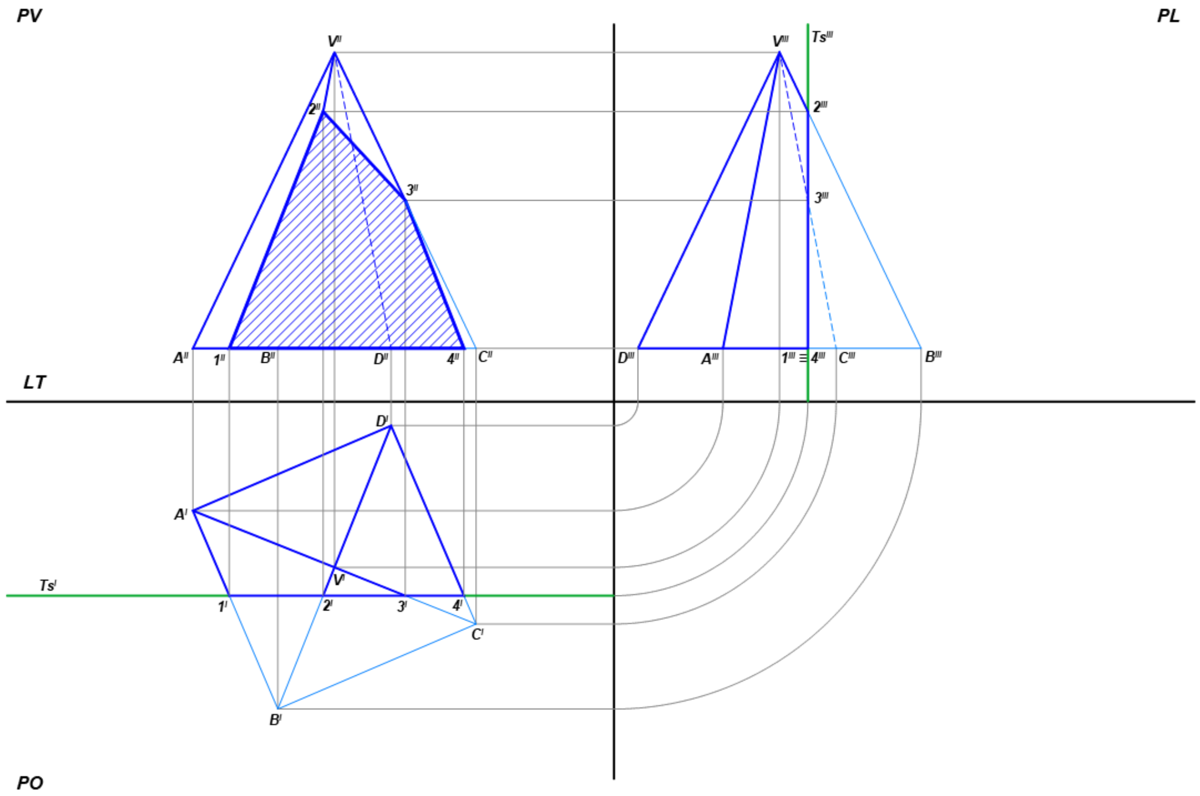
La proiezione sul piano orizzontale, data la posizione del piano secante, determina una sezione simile per forma, ma inferiore per dimensione, alla base della piramide.



considerata a tutti gli effetti la sezione in vera forma e grandezza poiché proiettata su un piano ad essa parallelo. Come indicato nel procedimento esecutivo della pagina precedente, il contorno della sezione dovrà essere rappresentato con spessore pari al doppio delle parti a vista e campita al suo interno con tratteggio inclinato di 45°.

La rappresentazione che rende possibile la descrizione dell'interno di un solido è la sezione. Convenzionalmente nell'ambito dell'architettura si definisce con il termine sezione il taglio verticale, mentre si definisce pianta l'immagine determinata dal taglio di un piano secante orizzontale.

Proiezioni ortogonali | Sezioni



Proiezione ortogonale: sezione verticale con piano secante parallelo al piano verticale di una piramide a base quadrata

1 – Impostazione della proiezione ortogonale

Tracciare la LT, linea di terra. Tracciare il piano ortogonale e individuare PO, PV e PL.

2 – Proiezione sul PO

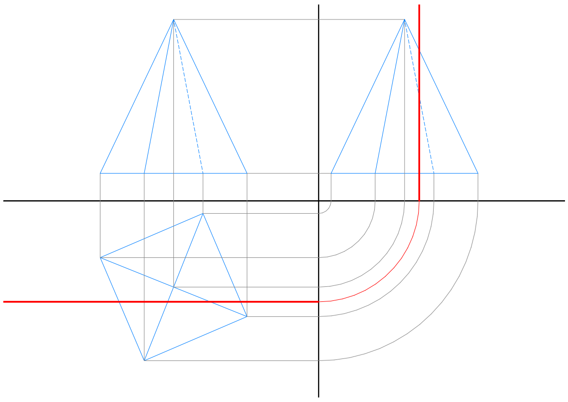
Rappresentare, in posizione generica parallela al PO, il quadrato ABCD base della piramide. Tracciare le diagonali AC, BD e individuare nell'intersezione la proiezione del vertice V.

3 – Proiezione sul PV

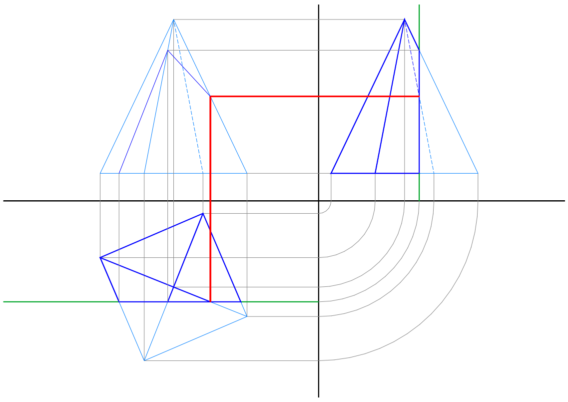
Tracciare alla quota d dalla LT la retta d'appartenenza della base ABCD. Tracciare alla quota h dalla retta della base, l'altezza del vertice della piramide. Proiettare sulla retta d'appartenenza della base sul PV: A – C e unire con segno di figura a vista. Proiettare all'altezza della base i punti B, D e V ad altezza h. Rappresentare: AV – CV – BV – DV. Proiettare sulla retta d'appartenenza della base sul PL: A – B – C – D. Proiettare all'altezza della piramide il vertice V ed unire con A – B – C – D.

4 – Impostazione della sezione

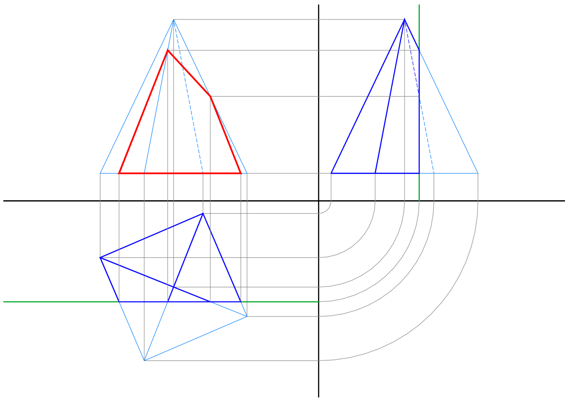
Rappresentare Ts^{I} e Ts^{III} e determinare nelle intersezioni con la figura i punti: 1 su AB; 2 su BV; 3 su CV; 4 su DC. Ripassare le parti a vista della prima proiezione (PO). Ripassare le parti a vista e le parti nascoste, della terza proiezione (PL). Tracciare i raggi ortogonali in prima e terza proiezione e determinare in seconda proiezione i punti di sezione: 1 – 2 – 3 – 4. Unire con spessore doppio rispetto alle parti a vista il contorno della sezione 1-2-3-4. Tratteggiare con segno a 45° l'area della sezione. Ripassare le parti a vista. Ripassare le parti nascoste.



Data la proiezione ortogonale di una piramide di vertice V e base quadrata ABCD genericamente ruotata intorno al proprio asse di un angolo α, impostare sui piani orizzontale e laterale il piano di sezione verticale, per mezzo delle sue tracce Ts^{I} e Ts^{III} a distanza n dalla linea di terra. Anche in questo caso, come nel precedente, il piano secante divide la piramide in due parti, una anteriore, da non considerare per la rappresentazione e una posteriore che sarà l'oggetto specifico della rappresentazione. Rappresentare la sezione del solido escludendo dalla proiezione dei punti la parte frontale anteriore.



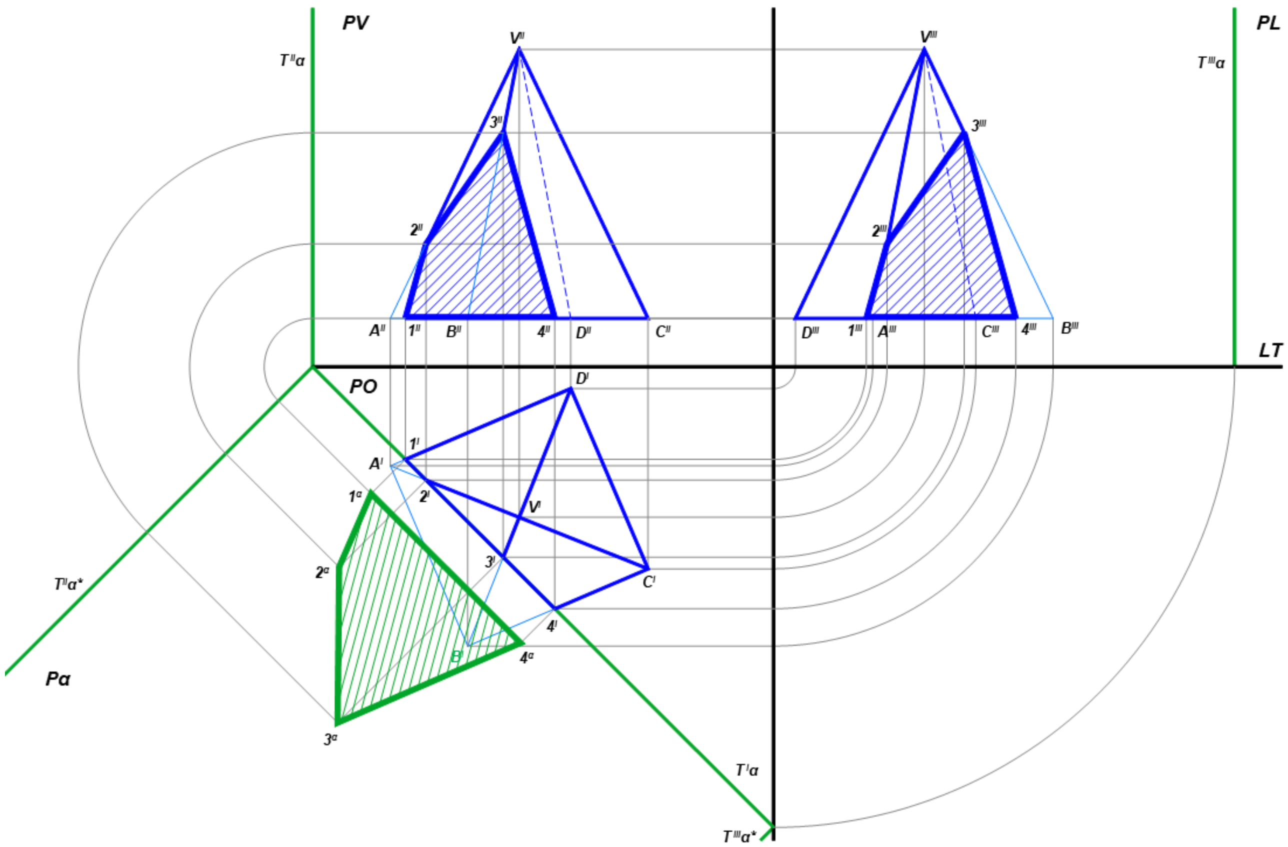
La posizione del piano secante ortogonale ai piani orizzontale e laterale permette di individuare i punti di sezione degli spigoli della base AB e CD, e gli spigoli BV e CV nell'intersezione fra le tracce prima e terza del piano secante e le rispettive proiezioni degli spigoli. Proiettare i punti di sezione dai piani orizzontale e laterale sul piano verticale e determinare nelle corrispondenti proiezioni degli spigoli la sezione sul piano verticale. I raggi proiettanti del piano orizzontale e del piano laterale dovranno coincidere nello stesso punto della proiezione sul piano verticale. È preferibile indicare i punti di sezione con i numeri per poterli immediatamente distinguere dai punti della figura di base.



La proiezione sul piano verticale, data la posizione del piano secante parallelo al piano verticale e la posizione generica della base della piramide, determina una sezione di forma quadrangolare e dimensione generica. Tale proiezione sul piano verticale, rappresenta, nella parte coincidente con il piano secante, la sezione in vera forma e grandezza poiché proiettata su un piano parallelo al piano verticale. Procedere come nel caso precedente rimarcando il contorno della sezione con spessore pari al doppio delle parti a vista e campendo il suo interno con tratteggio inclinato di 45°.

La proiezione ortogonale di sezioni determinate da piani secanti paralleli ad uno dei piani principali (PO, PV oppure PL) individuano su tale piano la sezione oggettiva del solido in vera forma e grandezza.

Proiezioni ortogonali | Sezioni

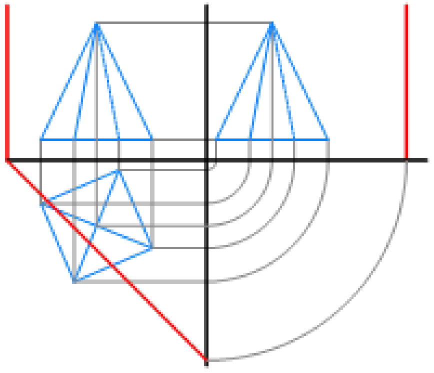


Proiezione ortogonale: sezione verticale con piano secante ortogonale al PO e inclinato rispetto al PV e al PL, di una piramide a base quadrata.

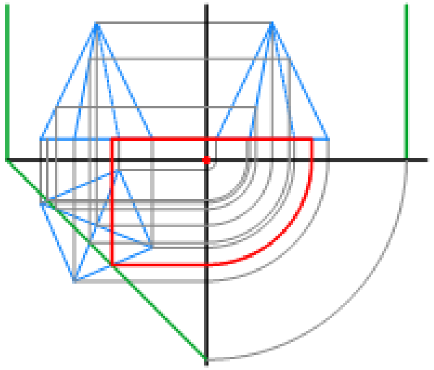
1 – Impostazione e proiezione ortogonale.
Tracciare la LT, linea di terra. Tracciare il piano ortogonale e individuare PO, PV e PL. Rappresentare, in posizione generica parallela al PO, il quadrato ABCD base della piramide. Tracciare le diagonali AC, BD e individuare nell'intersezione la proiezione del vertice V. Tracciare alla quota d dalla LT la retta d'appartenenza della base ABCD. Tracciare alla quota h dalla retta della base, l'altezza del vertice della piramide. Proiettare sulla retta d'appartenenza della base sul PV: A – C e unire con segno di figura. Proiettare sulla retta della base i punti: B, D e V ad altezza h. Rappresentare: AV – CV – BV – DV. Proiettare sulla retta d'appartenenza della base sul PL: D – B, unire con segno di figura, e a seguire i punti A e C. Proiettare all'altezza della piramide il vertice V. Rappresentare: DV – BV – AV – CV.

2 – Impostazione della sezione.
Rappresentare $T\alpha^{I}$ e $T\alpha^{III}$ e determinare nelle intersezioni con la figura i punti: 1 su AB, 2 su BV, 3 su CV, 4 su DC. Ripassare le parti a vista della prima proiezione (PO). Ripassare le parti a vista e le parti nascoste, della terza proiezione (PL). Tracciare i raggi ortogonali in prima e terza proiezione e determinare in seconda proiezione i punti di sezione: 1 – 2 – 3 – 4. Unire con spessore doppio rispetto alle parti a vista il contorno della sezione 1-2-3-4. Tratteggiare con segno a 45° l'area della sezione. Ripassare le parti a vista. Ripassare le parti nascoste.

3 – Determinazione della sezione oggettiva.
Ribaltamento del piano secante sul PO intorno alla cerniera $T^{I}\alpha$. Proiettare ortogonalmente alla $T^{I}\alpha$ e alla $T^{II}\alpha$, e unire, i punti della sezione: 1 – 2 – 3 – 4. Ripassare il contorno della sezione sul piano α con spessore doppio rispetto alle parti a vista. Campitura dell'area di sezione con tratteggio inclinato di 45°.

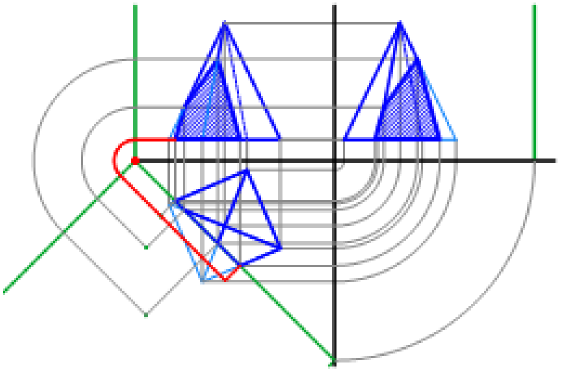


Data la piramide a base quadrata, parallela al piano orizzontale e ruotata rispetto ai piani verticale e laterale, determiniamo una sezione generata da un piano secante α ortogonale al piano orizzontale e inclinato rispetto ai piani verticale e laterale.
Per la determinazione dei punti di sezione si individuano le intersezioni sul piano orizzontale fra $T^{I}\alpha$ e la prima proiezione della piramide.



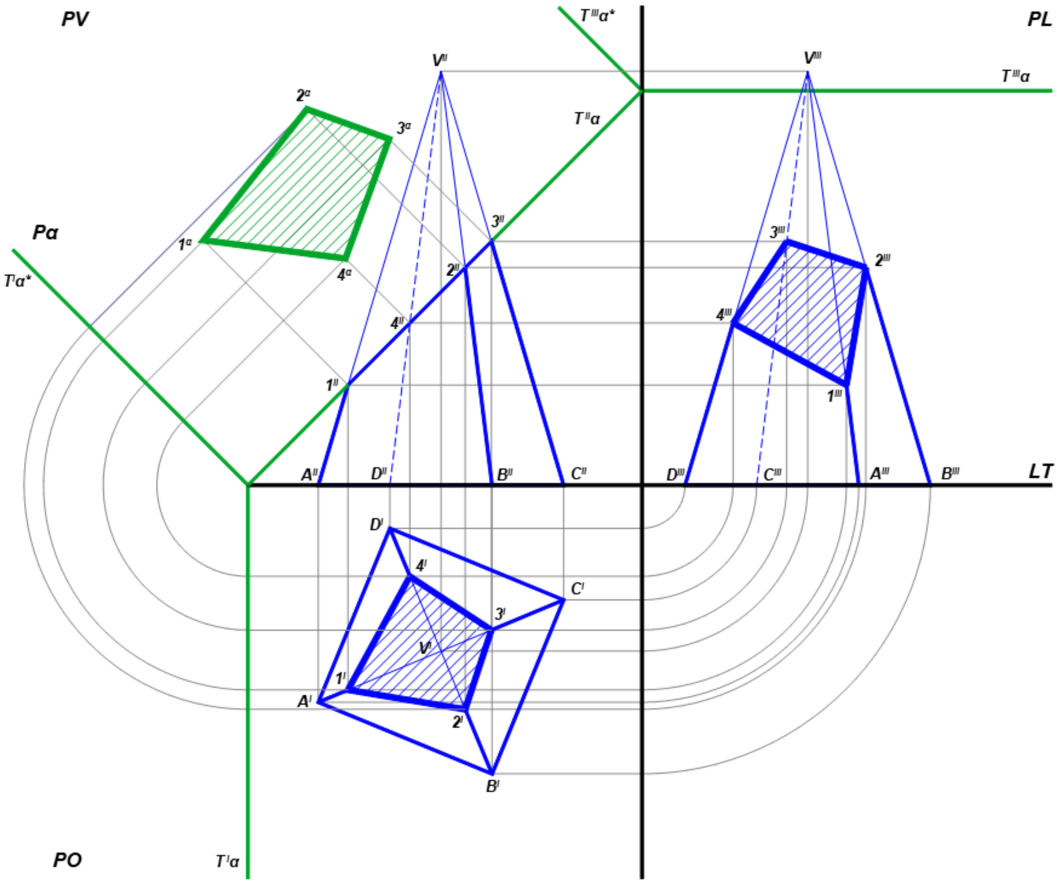
In particolare poiché il piano secante α si trova in posizione ortogonale rispetto al piano orizzontale, i punti di sezione nella prima proiezione sono dati dalle intersezioni della $T^{I}\alpha$ con la proiezione del solido. Proiettare successivamente i punti di sezione sui piani verticale e laterale, tenendo conto che i raggi proiettanti dovranno coincidere con i corrispondenti spigoli della figura. Unendo in successione i punti della sezione si ottengono, sui piani verticale e laterale, le proiezioni scorciate del solido sezionato.

La proiezione della sezione oggettiva, ovvero la sezione in vera forma e grandezza del solido sarà rappresentata sul piano α opportunamente ribaltato intorno alla cerniera $T^{I}\alpha$. La proiezione oggettiva, in vera forma e grandezza della sezione sul piano secante ribaltato, si determinerà nell'intersezione fra le proiezioni ortogonali alla $T^{I}\alpha$ e le proiezioni ortogonali alla $T^{II}\alpha$.



I piani secanti possono trovarsi in varie posizioni rispetto al quadro e all'oggetto stesso. Oltre alla rappresentazione dell'oggetto sezionato è importante, in questi casi, determinare attraverso l'utilizzo di piani ausiliari, la vera forma e dimensione della superficie di sezione quando questa non si trova in condizione di parallelismo rispetto al quadro.

Proiezioni ortogonali | Sezioni



Proiezione ortogonale: sezione con piano secante ortogonale al PV e inclinato rispetto al PO e al PL, di una piramide a base quadrata.

1 – Impostazione della proiezione ortogonale

Tracciare la linea di terra (LT). Tracciare il piano ortogonale e individuare PO, PV e PL.

2 – Proiezione sul PO

Rappresentare, in posizione generica giacente sul PO, il qua drato ABCD base della piramide. Tracciare le diagonali BD, AC e individuare nell'intersezione la proiezione del vertice V.

3 – Proiezione sul PV

Proiettare sulla linea di terra i punti A – B – C – D. Proiettare il vertice V. Unire i vertici della base A-B-C-D con V.

4 – Proiezione sul PL

Proiettare dal PV il vertice V sul PL. Proiettare la base ABCD dal PO sul PL. Proiettare dal PO il vertice V sul PL. Unire sul PL i vertici della base A-B-C-D con V.

5 – Impostazione del piano di Sezione

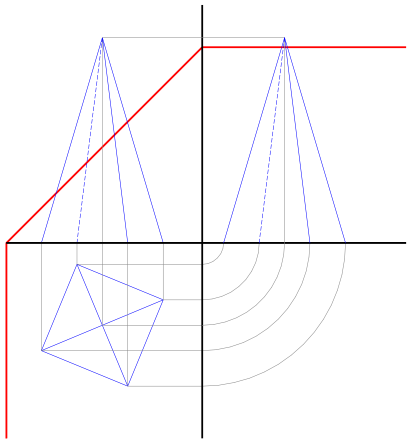
La traccia $T^{II}\alpha$ del piano secante sul PV individua i punti: 1 su AV; 2 su BV; 3 su CV; 4 su DV. Tracciare $T^{I}\alpha$ sul PO e $T^{III}\alpha$ sul PL.

6 – La sezione su PO e PL

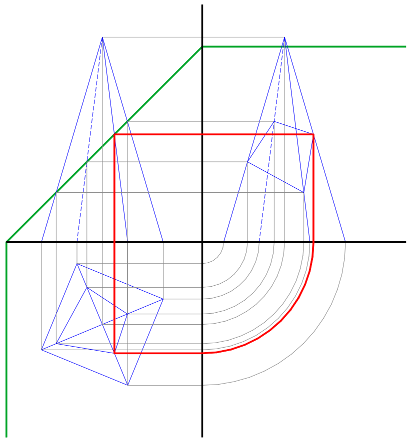
Proiettare ortogonalmente su PO e PL i punti: 1 e 2. Unire prima sul PO e poi sul PL i punti 1-2. Proiettare ortogonalmente su PO e PL il punto: 3. Unire prima sul PO e poi sul PL i punti 2-3. Proiettare ortogonalmente su PO e PL il punto: 4. Unire prima sul PO e poi sul PL i punti 3-4 e 4-1.

7 – Determinazione della sezione oggettiva

Ribaltamento del piano secante sul PV intorno alla cerniera $T^{II}\alpha$. Proiettare ortogonalmente alla $T^{I}\alpha$ e alla $T^{II}\alpha$, e unire, i punti della sezione: 1 – 2 – 3 – 4. Ripassare il contorno della sezione su α con spessore doppio rispetto alle parti a vista. Campitura dell'area di sezione con tratteggio inclinato di 45°.

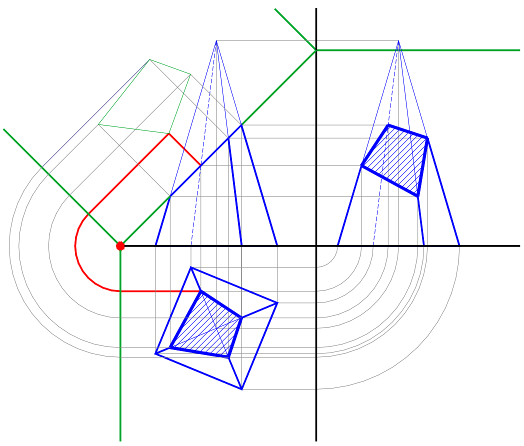


Posizionare in modo generico sul PO la base quadrata della piramide facendola ruotare rispetto al proprio asse e successivamente impostare il piano secante α. Poiché il piano è ortogonale al PV, la prima e la terza traccia di α, risulteranno ortogonali rispettivamente alla LT e alla traccia del PL sul PV. La traccia T^{II}α inclinata rispetto alla LT attraversa la piramide sezionandola in due parti nei punti 1-2-3-4. La sezione sul PV si presenterà di profilo e sarà rappresentata dal segmento 1-3 rispettivamente sezioni degli spigoli AV (1) e CV (3).

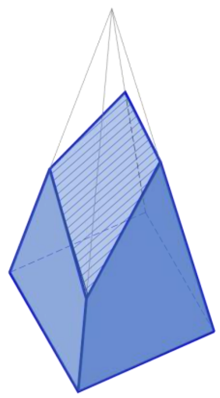


Il contorno della sezione sul PO sarà dato dall'intersezione dei raggi proiettanti passanti 1-2-3-4, con la proiezione della piramide. Analogamente si procederà per il contorno della sezione sul PL proiettando anche in questo caso i punti 1-2-3-4. Determinare le proiezioni dei punti collegando raggi ortogonali sul PO, PV e PL. Data la posizione della piramide e inclinazione del piano secante, le immagini delle proiezioni della sezione risulteranno dei quadrilateri irregolari.

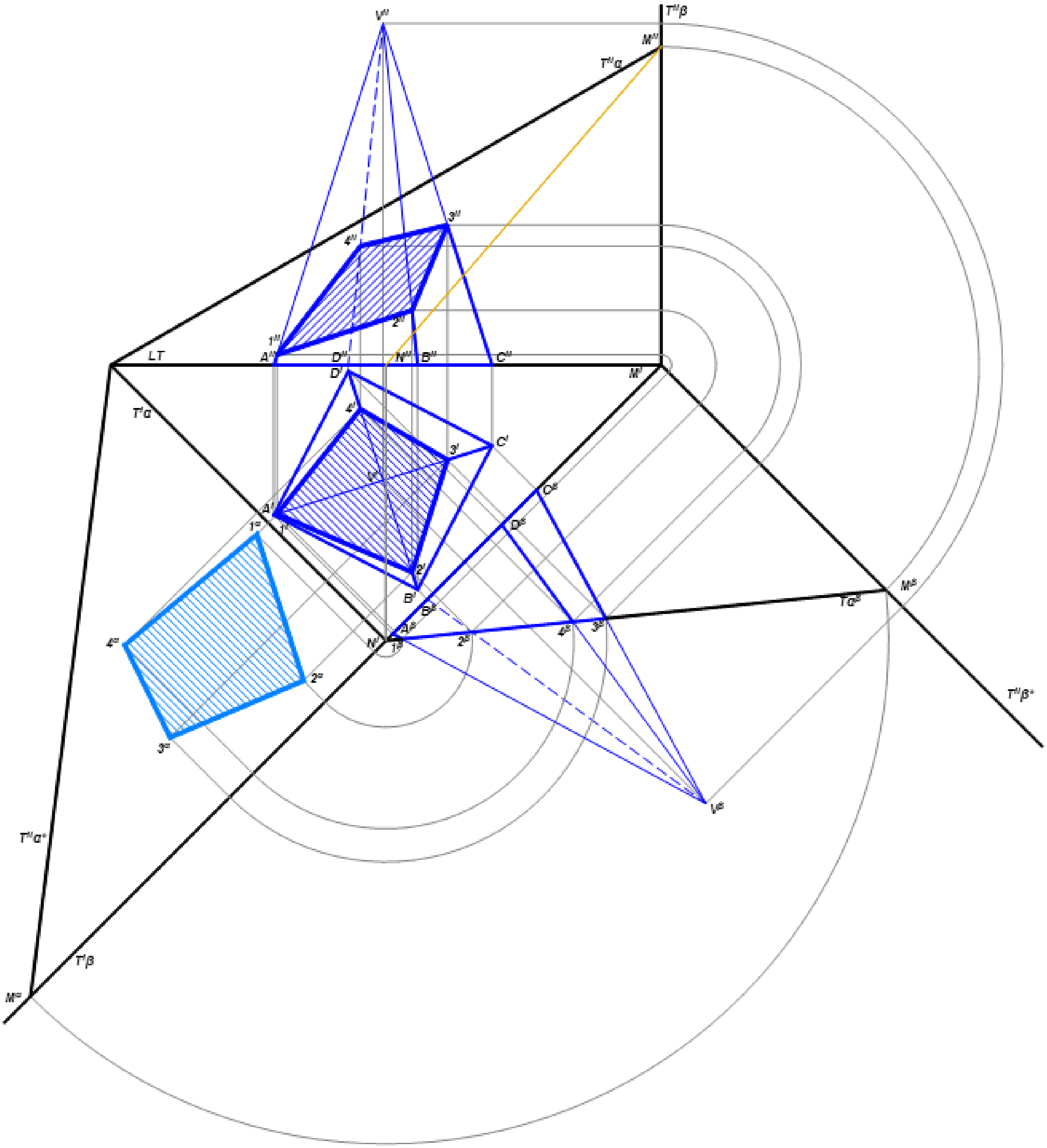
Poiché la sezione appartiene al piano α, in quanto da esso determinata, si ipotizzerà il ribaltamento del piano secante sul PV facendolo ruotare rispetto alla cerniera T^{II}α, al fine di determinare la sezione oggettiva della piramide. Proiettare i punti 1-2-3-4 secondo le direzioni ortogonali alla T^{I}α e alla T^{II}α. Ricordiamo che, nella rotazione, i punti del piano oltre a mantenere la stessa distanza dalla cerniera ruotano, rispetto ad essa, secondo piani ortogonali.



Vista tridimensionale



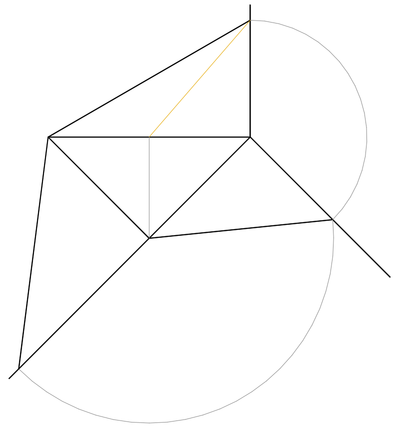
Proiezioni ortogonali | Sezioni



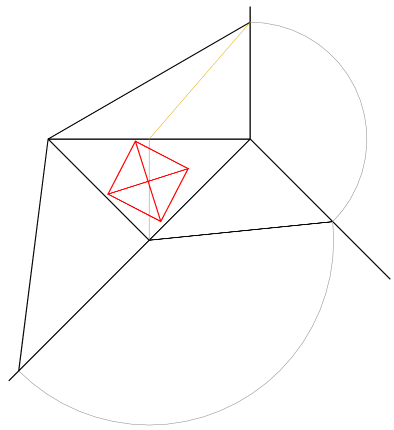
Sezione verticale con piano secante genericamente inclinato di una piramide a base quadrata

1 – Impostazione dei piani di proiezione e sezione
Tracciare la LT, linea di terra. Tracciare la $T^{I}\alpha$ inclinata di 45° rispetto alla LT. Tracciare la $T^{II}\alpha$ inclinata di 30° rispetto alla LT. Tracciare la $T^{I}\beta$ ortogonale rispetto alla $T^{I}\alpha$ e individuare NI nell'intersezione. Tracciare la $T^{II}\beta$ ortogonale rispetto alla LT e individuare M^{II} nell'intersezione con $T^{II}\alpha$. Ribaltare la $T^{II}\beta^*$ ortogonalmente rispetto alla $T^{I}\beta$. Ribaltare Mβ sulla $T^{II}\beta^*$. Unire N^{I} e Mβ (Tαβ). Ribaltare Mα sulla $T^{I}\beta$. Unire Mα con l'intersezione del piano α sulla LT ($T^{II}\alpha^*$).
2 – La retta di massima pendenza
Proiettare N sul PV. Unire NM retta di massima pendenza.
3 – Proiezione della piramide sul Piano Orizzontale
Tracciare il quadrato ABCD, base della piramide. Tracciare le diagonali AC e BD.
4 – Proiezione della piramide sul Piano Verticale
Proiettare i vertici della base: A – B – C – D. Proiettare il vertice V. Unire il vertice V con la base: AV – BV – CV – DV.
5 – Proiezione della piramide sul Piano β
Proiettare i vertici della base: A – B – C – D. Proiettare il vertice V riportando la sua altezza dal PV. Unire il vertice V con la base e individuare i punti di sezione: 1 su AV; 2 su BV; 3 su CV; 4 su DV.
6 – Proiezione dei punti di sezione
Proiettare su PO e PV, con direzioni ortogonali alle tracce di β i punti di sezione: 1 – 2 – 3 – 4.
7 – Determinazione della sezione in vera forma e grandezza
Riportare dal Piano β ortogonalmente a Tiβ e dal PO ortogonalmente a TIα i punti di sezione: 1 – 2 – 3 – 4.
8 – Completamento grafico della rappresentazione sul Piano Orizzontale.
Ripassare con segno di grossezza doppia rispetto alle parti a vista il contorno della sezione. Campitura dell'area di sezione. Ripassare con segno di linea continua il contorno della proiezione. Ripassare con segno di linea continua le parti interne a vista.
9 – Completamento grafico della rappresentazione sul Piano Verticale
Ripassare con segno di grossezza doppia rispetto alle parti a vista il contorno della sezione. Campitura dell'area di sezione. Ripassare con segno di linea continua il contorno della proiezione. Ripassare con segno di linea continua le parti interne a vista.
10 – Completamento grafico della rappresentazione sul Piano β
Ripassare con segno di linea continua il contorno della proiezione. Ripassare con segno di linea continua le parti interne a vista.
11 – Completamento grafico della sezione in vera forma e grandezza sul Piano di sezione α
Ripassare con segno di grossezza doppia rispetto alle parti a vista il contorno della sezione. Campitura dell'area di sezione.

La proiezione di una piramide a base quadrata sezionata da un piano α genericamente inclinato, deve essere impostata affrontando prima il problema della rappresentazione sui piani principali e successivamente il tema della determinazione della sezione oggettiva. Appare immediatamente in tutta evidenza l'irregolarità della sezione in relazione alla posizione casuale sul piano orizzontale della piramide e soprattutto della genericità dell'inclinazione del piano secante. Si rende necessario, di conseguenza, impostare un piano ausiliario che abbia caratteristiche tali da individuare univocamente in una sua traccia i punti di sezione. Impostare a tal fine un piano β ortogonale al piano orizzontale e al piano α. Le tracce del piano secante e del piano ausiliario β, si intersecano nel punto N sul piano orizzontale e nel punto M sul piano verticale. La retta MN rappresenta la retta di massima pendenza del piano secante α.

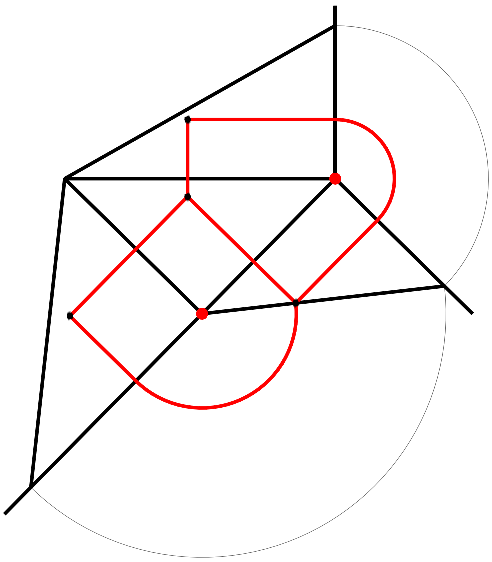


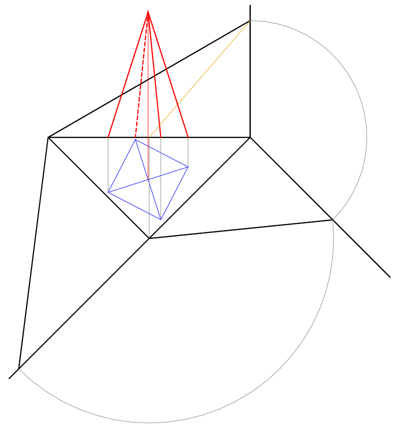
Posizionare la base ABCD della piramide appoggiandola sul piano orizzontale e facendola ruotare genericamente rispetto al proprio asse in modo tale da non avere punti di coincidenza nelle proiezioni sui piani principali.

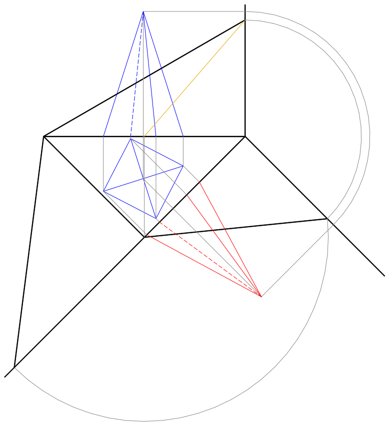


Rappresentare la piramide sul piano verticale definendo le parti a vista e nascoste dalla proiezione.

Schema delle proiezioni

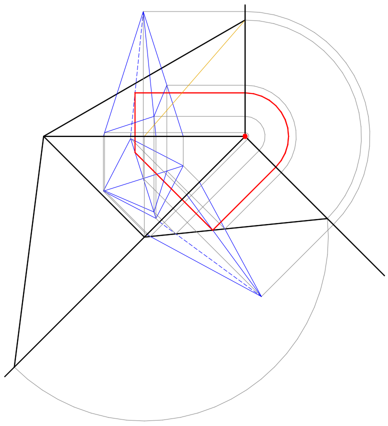




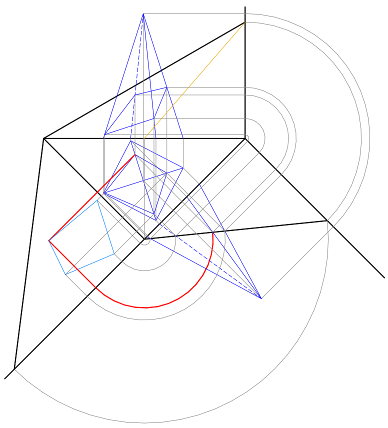


Proiettare la piramide ortogonalmente alla $T^{I}\beta$ sul piano ausiliario β e determinare i punti di sezione 1, 2, 3 e 4 rispettivamente sugli spigoli AV, BV, CV e DV, nell'intersezione della proiezione del solido con la $T\alpha^{\beta}$ traccia del piano secante α $(N^{I}M^{\beta})$ sul piano ausiliario β.

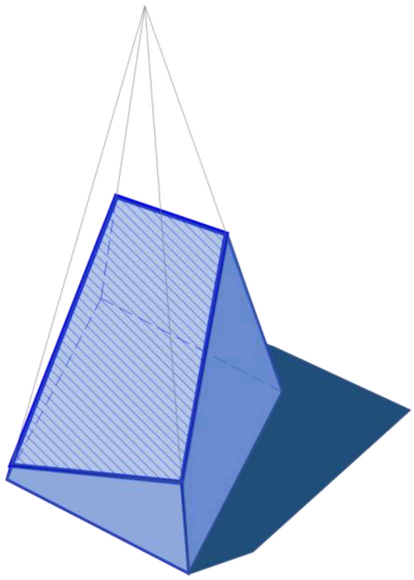
Proiettare i punti della sezione sul piano ausiliario β sui piani orizzontale e verticale, ortogonalmente alle tracce del piano seguendo lo schema proiettivo riportato a lato. Completata la determinazione delle sezioni sui piani principali, definire la rappresentazione delle parti a vista e nascoste del tronco di piramide risultante dalla sezione, tenendo conto sempre dell'ortogonalità dei raggi proiettanti verso i piani di proiezione. Rimarcare il contorno della sezione, sul piano orizzontale e sul piano verticale, con uno spessore pari al doppio delle parti a vista e campire la superficie di sezione con un tratteggio inclinato di 45°.



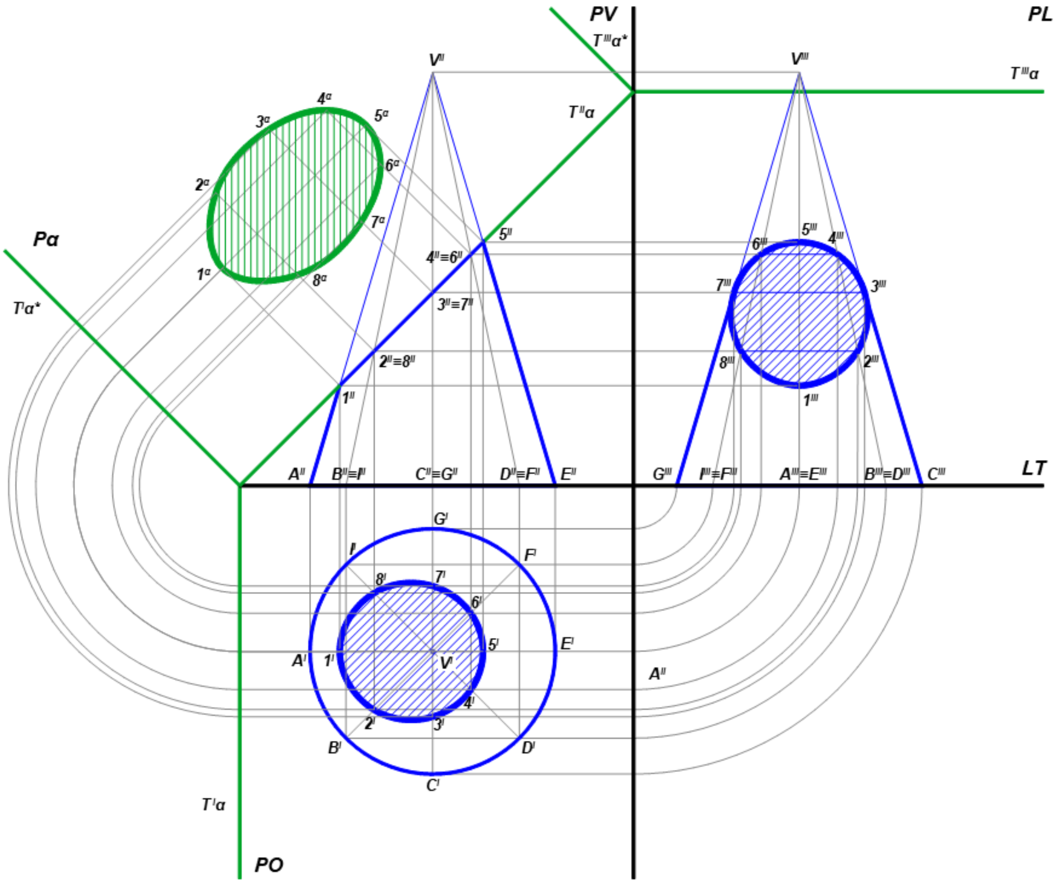
L'ultima fase della proiezione si riferisce alla determinazione della sezione oggettiva in vera forma e grandezza. Così come per il ribaltamento del piano di sezione α intorno alla cerniera rappresentata dalla $T^{I}\alpha$, ricordando che i punti ruotano secondo piani ortogonali alla cerniera, proiettare i punti della sezione ortogonalmente alla $T^{I}\alpha$. Seguendo lo schema proiettivo rappresentato a lato, riportare alla stessa distanza dalla cerniera i punti della sezione sul piano β, proiettare ortogonalmente alla $T^{I}\beta$ e nell'intersezione con i raggi proiettati dal piano orizzontale, determinare la sezione in vera forma e grandezza.



Vista tridimensionale



Proiezioni ortogonali | Sezioni coniche



Ellisse: sezione con piano secante genericamente inclinato di un cono

1 – Proiezioni sui piani principali

Tracciare la linea di terra LT. Tracciare la verticale per LT individuando PO, PV e PL. Rappresentare sul PO la base del cono e il vertice V. Proiettare sul PV la base nella sua massima estensione AE. Proiettare il vertice V del cono su PO, PV e PL. Rappresentare il cono sul PV. Proiettare sul PL la base nella sua massima estensione GC. Rappresentare il cono sul PL.

2 – Impostazione del piano di sezione α

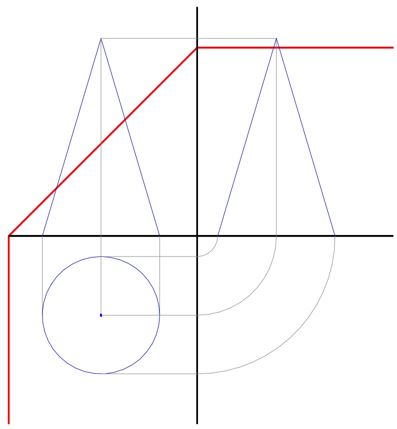
Tracciare, inclinata rispetto alla LT, la TIIα seconda traccia del piano di sezione α. Tracciare, ortogonalmente rispetto alla LT, la $T^{I}\alpha$ prima traccia del piano di sezione α. Tracciare, ortogonalmente rispetto al PV, la $T^{III}\alpha$, terza traccia del piano di sezione α. Ribaltare sul PV il piano α tracciando ortogonalmente alla $T^{II}\alpha$: $T^{I}\alpha^*$ e la $T^{III}\alpha^*$

3 – Proiezioni del cono sezionato

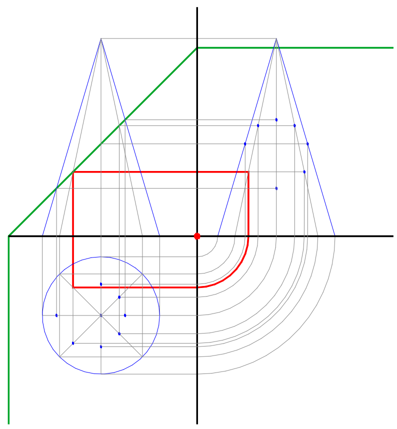
Dividere la circonferenza di base in 8 punti individuando per ognuno il corrispondente apotema: AV, BV, CV, DV, EV, FV, GV e IV. Proiettare i punti B e I sul PV. Tracciare BV sul PV. Proiettare i punti D e F sul PV. Tracciare DV sul PV. Proiettare i punti I e F sul PL. Tracciare IV sul PL. Proiettare i punti B e D sul PL. Tracciare BV sul PL. Proiettare i punti: 1 su AV; 2 su BV; 3 su CV; 4 su DV; 5 su EV; 6 su FV; 7 su GV e 8 su IV. Unire raccordandole le proiezioni dei punti sul PO e sul PL. Campire con tratteggio inclinato l'area di sezione. Ripassare con segno di parte a vista il contorno delle proiezioni sul PO, PV e PL.

4 – Determinazione dell'ellisse, sezione oggettiva del cono

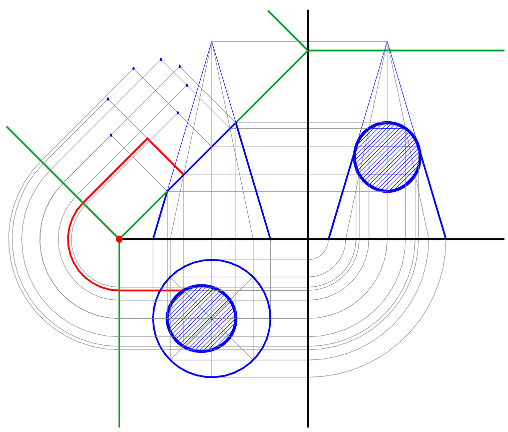
Proiettare ortogonalmente alla $T^{I}\alpha$ e alla $T^{II}\alpha$, i punti della sezione da 1 a 8. Unire raccordandole le proiezioni dei punti 1-8 sul piano α: ELLISSE. Campire con tratteggio inclinato l'area di sezione.



Un importante settore delle sezioni in proiezione ortogonale è rappresentato dalle sezioni coniche o più sinteticamente coniche, ovvero le sezioni del cono, solido determinato dalla rotazione intorno al proprio asse di una retta inclinata detta generatrice passante per il vertice oppure dalla rotazione di un triangolo rettangolo intorno a un suo cateto, sezionato da un piano α inclinato rispetto all’asse e a tutte le generatrici. In questo caso il piano α è ortogonale al piano verticale e inclinato rispetto ai piani orizzontale e laterale.

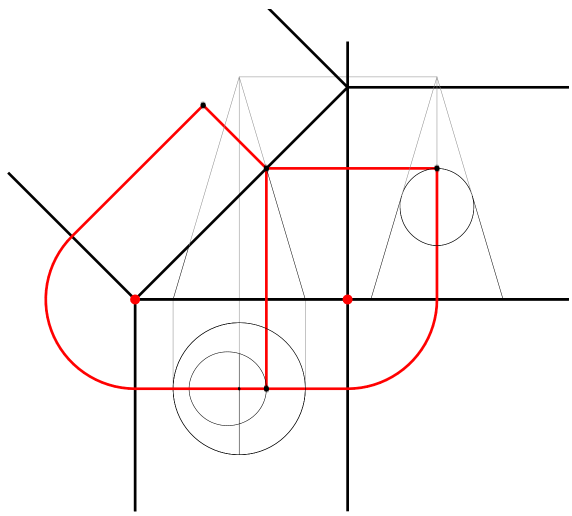


Per determinare la sezione del cono si divide la circonferenza di base in otto parti uguali facendo coincidere in questi punti le corrispondenti generatrici. La traccia $T^{II}\alpha$ seziona sul piano verticale il cono e tutte le sue generatrici comprese quindi le otto individuate in precedenza. Proiettare, dal piano verticale, i punti di sezione fra il piano α e le generatrici sui piani orizzontale e laterale e unire con una curva i punti così ottenuti. La sezione è rappresentata da una curva chiusa la cui forma è indipendente dall’angolazione del piano secante. Si evidenzia che ad un maggior numero di punti di divisione sulla circonferenza di base e di conseguenza di generatrici, corrisponde una maggiore precisione nella definizione della curva di sezione.

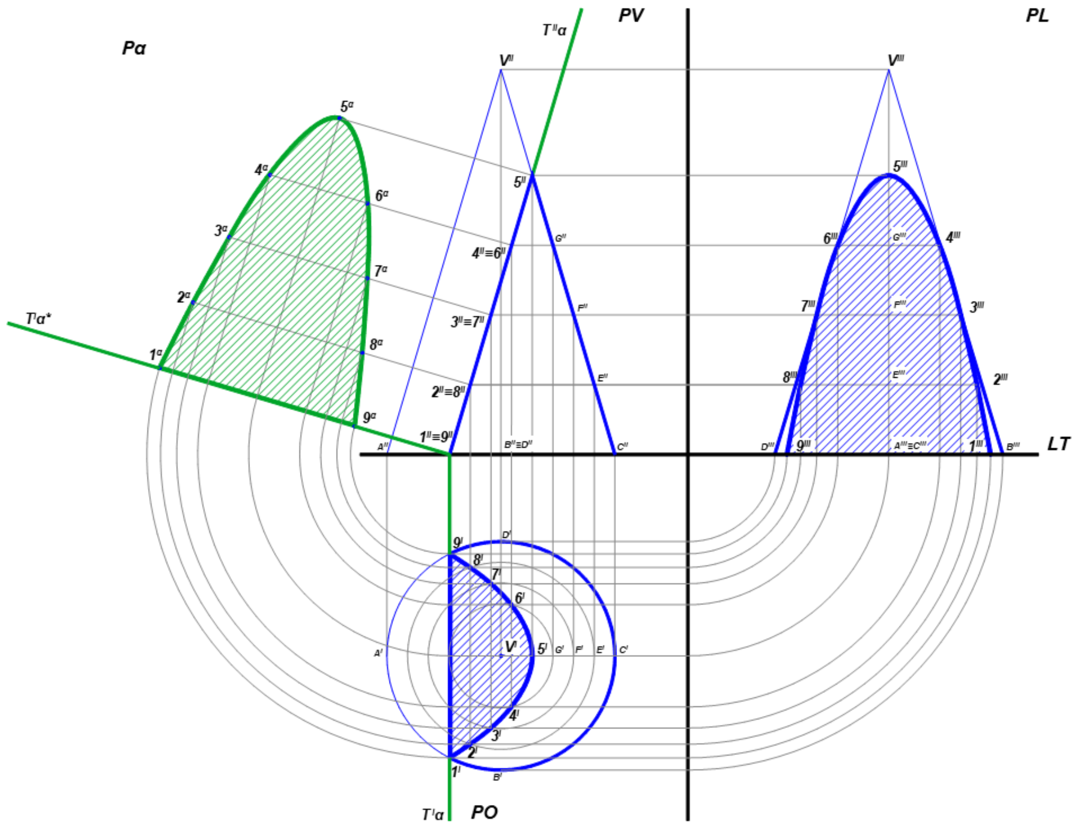


Per capire esattamente la tipologia della sezione sarà necessario, per mezzo del ribaltamento del piano secante sul piano verticale determinare la superfice di sezione in vera forma e grandezza. Dal ribaltamento si evince che data la posizione del piano secante rispetto al cono il luogo geometrico della curva chiusa di sezione è un’ellisse.

Schema delle proiezioni



Proiezioni ortogonali | Sezioni coniche



Parabola: sezione di un cono con piano secante parallelo ad una generatrice

1 – Proiezioni sui piani principali

Tracciare la linea di terra LT. Tracciare la verticale per LT individuando PO, PV e PL. Rappresentare sul PO la base del cono e il vertice V. Proiettare sul PV la base nella sua massima estensione AC. Proiettare il vertice V su PO, PV e PL. Rappresentare il cono sul PV. Proiettare sul PL la base nella sua massima estensione BD. Rappresentare il cono sul PL.

2 – Impostazione del piano di sezione α

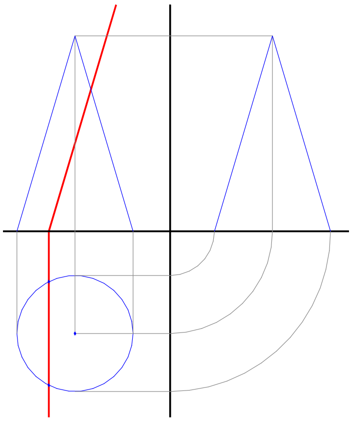
Tracciare, inclinata rispetto alla LT e parallela alla generatrice AV, la $T^{II}\alpha$ traccia del piano di sezione α, ortogonale al PV. Tracciare, ortogonalmente rispetto alla LT, la $T^{I}\alpha$ del piano di sezione α.

3 – Proiezioni del cono sezionato

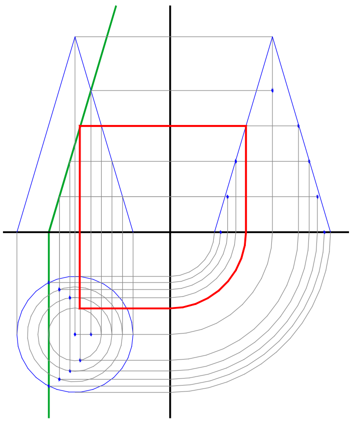
Tracciare parallelamente al PO un piano secante che individua nell'intersezione fra la generatrice CV e il piano α il punto 5. Sul PV dividere la distanza 5C in 4 parti tracciando 3 piani secanti paralleli al PO e individuando sulla generatrice CV i punti G, F ed E, mentre nel piano α si individuano i punti di sezione: $4^{II}\equiv6^{II}$, $3^{II}\equiv7^{II}$ e $2^{II}\equiv8^{II}$. Proiettare i punti E, F e G sul PO e tracciare le circonferenze di centro V^{I} e raggi $V^{I}E^{I}$, $V^{I}F^{I}$ e $V^{I}G^{I}$, Proiettare i punti: 1 sulla linea di terra; 2 sulla circonferenza di raggio VE; 3 sulla circonferenza di raggio VF; 4 sulla circonferenza di raggio VG; 6 sulla circonferenza di raggio VG; 7 sulla circonferenza di raggio VF; 8 sulla circonferenza di raggio VE; 9 sulla linea di terra. Unire raccordandole, da 1 a 9 le proiezioni dei punti sul PO. Campire con tratteggio inclinato l'area di sezione. Ripassare con segno di parte a vista il contorno delle proiezioni sul PO. Ripassare con segno di parte a vista il contorno delle proiezioni sul PV. Unire raccordandole, da 1 a 9 le proiezioni dei punti sul PL. Campire con tratteggio inclinato l'area di sezione. Ripassare con segno di parte a vista il contorno delle proiezioni sul PL.

4 – Determinazione della parabola, sezione oggettiva del cono

Ribaltare sul PV il piano α tracciando ortogonalmente alla $T^{II}\alpha$ la $T^{I}\alpha$*. Proiettare ortogonalmente alla $T^{I}\alpha$ e alla $T^{II}\alpha$, i punti della sezione da 1 a 9. Unire raccordandole le proiezioni dei punti 1-9 sul piano α: PARABOLA. Campire con tratteggio inclinato l'area di sezione.

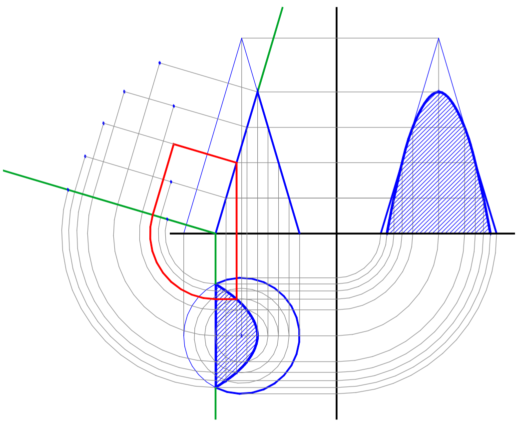


Proiettare un cono e determinare la sezione di un piano secante, parallelo ad una sola generatrice, ortogonale al piano verticale e inclinato rispetto ai piani orizzontale e laterale. La sezione sul piano verticale si proietterà di profilo e sarà costituita da un unico segmento. La proiezione sugli altri due piani principali si risolve tracciando, in questo caso, tre piani ausiliari paralleli alla circonferenza di base. Si evidenzia che più piani ausiliari verranno impostati e meno approssimata sarà la curvatura della sezione.

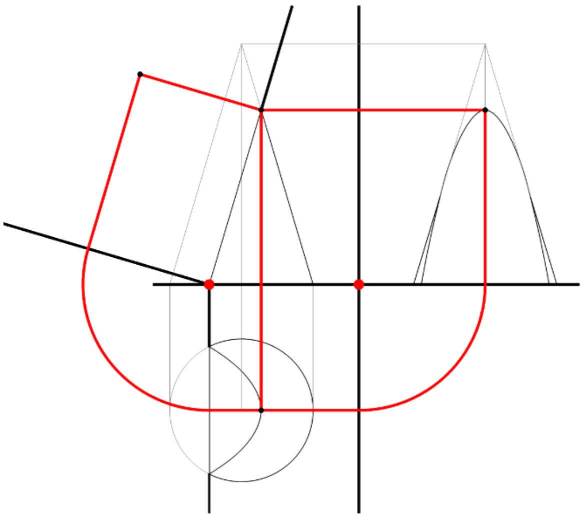


Dall'intersezione dei piani ausiliari con la generatrice VC si ricavano i punti E^{II}, F^{II} e G^{II} sul piano verticale, che verranno successivamente proiettati sul piano orizzontale al fine di rappresentare i cerchi di centro V e raggi VE^{I}, VF^{I} e VG^{I}, in cui determinare le intersezioni con il piano secante. Le proiezioni dei punti di sezione saranno quindi proiettate sui piani orizzontale e laterale, e a seguire unite a formare una curva. La sezione è rappresentata da una curva aperta, la cui forma è una parabola.

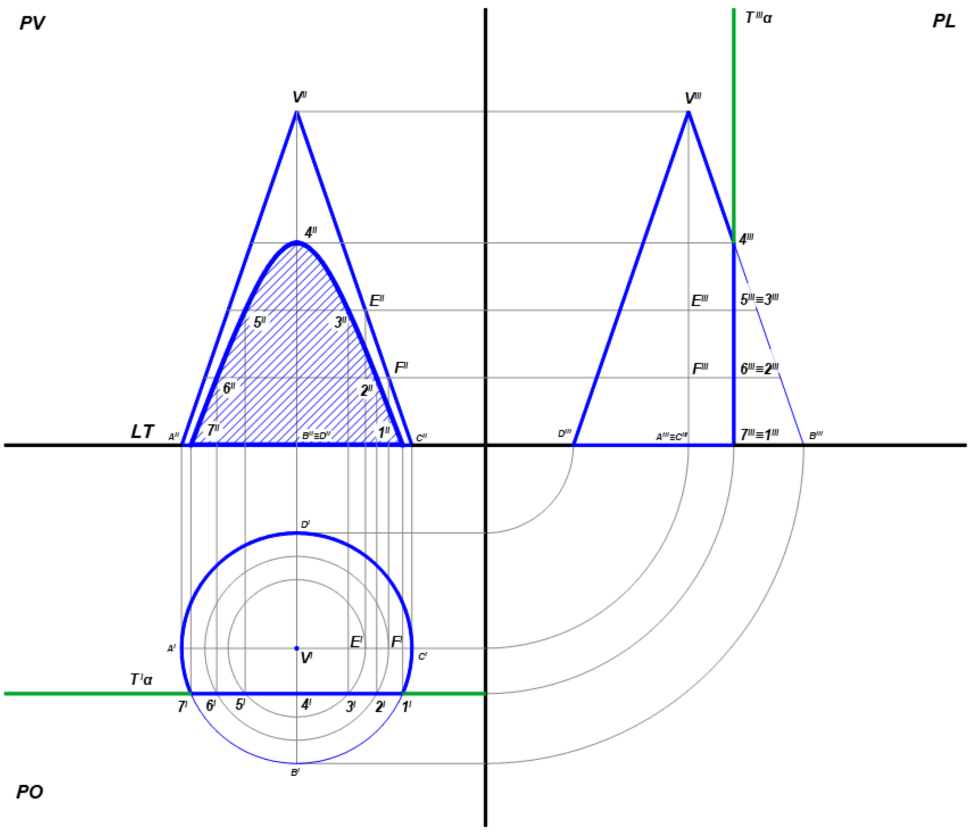
Ribaltando il piano secante sul piano verticale, facendolo ruotare intorno alla cerniera $T^{II}\alpha$, si potrà determinare la reale superficie di sezione in vera forma e grandezza della parabola.



Schema delle proiezioni



Proiezioni ortogonali | Sezioni coniche



Iperbole: sezione di un cono con piano secante parallelo all'asse

1 – Proiezioni sui piani principali

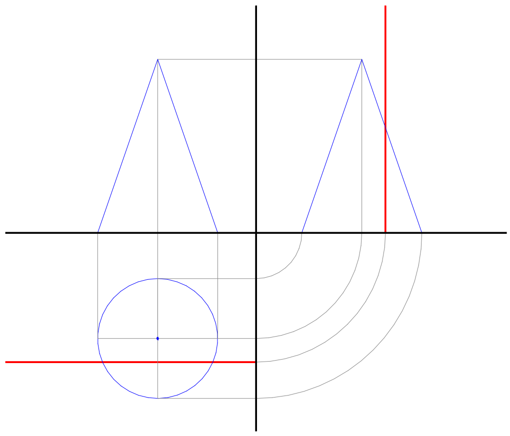
Tracciare la linea di terra LT. Tracciare la verticale per LT individuando PO, PV e PL. Rappresentare sul PO la base del cono e il vertice V. Tracciare i diametri alla base AC e BD rispettivamente parallelo e ortogonale al PV. Proiettare sul PV la base nella sua massima estensione AC. Proiettare il vertice V del cono su PV e PL. Proiettare AC sul PL e BD sul PV. Tracciare sul PV le generatrici AV e CV. Proiettare sul PL la base nella sua massima estensione BD. Tracciare sul PL le generatrici DV e BV.

2 – Impostazione del piano di sezione α

Tracciare, parallelamente all'asse del cono, la $T^{I}\alpha$ traccia del piano di sezione α, ortogonale al PO. Individuare nell'intersezione con la base i punti 1 e 7. Individuare nell'intersezione con la generatrice BV il punto 4. Proiettare sul PL, parallelamente all'asse del cono, la $T^{III}\alpha$ e riportare i punti 7 e 1 alla base e 4 sulla generatrice BV.

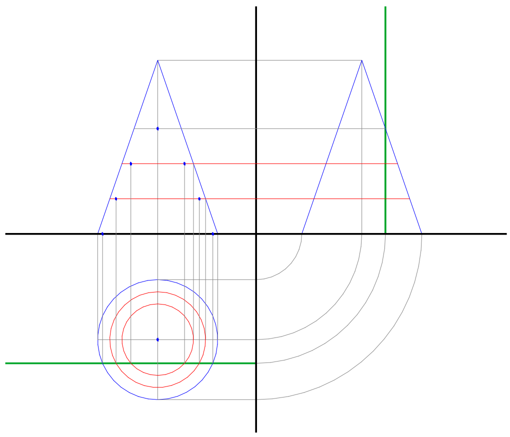
3 – Proiezioni del cono sezionato

Tracciare parallelamente al PO un piano secante passante per 4 e a seguire altri due piani ad esso paralleli ed equidistanti, individuando sulla $T^{III}\alpha$ i punti 5-3 e 6-2, oltre ai punti E ed F sulla generatrice CV. Proiettare il punto 1 sul PV nell'intersezione con la LT. Proiettare il punto F sul PO. Tracciare la circonferenza di centro V^{I} e raggio $V^{I}F^{I}$ individuando i punti 2 e 6 sulla $T^{I}\alpha$. Proiettare sul PV il punto 2 nell'intersezione con il piano secante passante per F. Proiettare il punto E sul PO. Tracciare la circonferenza di centro V^{I} e raggio $V^{I}E^{I}$ individuando i punti 3 e 5 sulla $T^{I}\alpha$. Proiettare sul PV il punto 3 e 5 nelle intersezioni con il piano secante passante per E. Proiettare sul PV il punto 6 nell'intersezione con il piano secante passante per F. Proiettare il punto 7 sul PV nell'intersezione con la LT. Unire, raccordandole da 1 a 7, le proiezioni dei punti sul PV. Campire con tratteggio inclinato l'area di sezione. Ripassare con segno di parte a vista il contorno delle proiezioni sui piani principali.

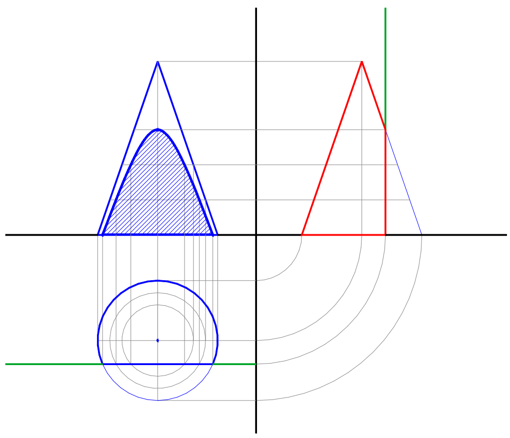


La sezione di un cono determinata da un piano secante α parallelo a due generatrici, AV e CV nel caso in oggetto, inclinato rispetto a tutte le altre, determina un'iperbole. Nella realtà l'iperbole è la sezione di due coni sovrapposti, falda inferiore e falda superiore, con vertice V in comune e asse appartenente alla stessa retta. Nella proiezione ortogonale, per semplicità, viene proiettata la sola sezione determinata nella falda inferiore.

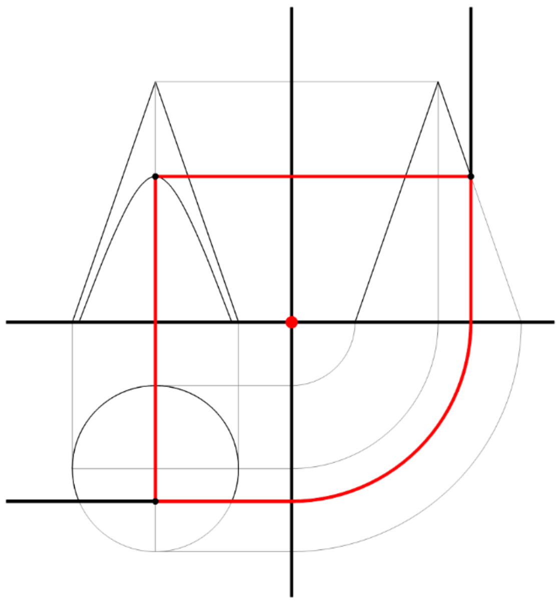
È possibile proiettare la sezione sia con il metodo delle generatrici adottato per l'ellisse che con il metodo dei piani ausiliari paralleli alla base utilizzato per la parabola. Nel caso specifico, definiti i piani ausiliari e proiettati sui piani principali, si provvede ad individuare le intersezioni sul piano orizzontale delle tracce concentriche dei piani ausiliari con la traccia del piano secante α. Tali intersezioni saranno di seguito proiettate sul piano verticale alle rispettive quote dei piani ausiliari.



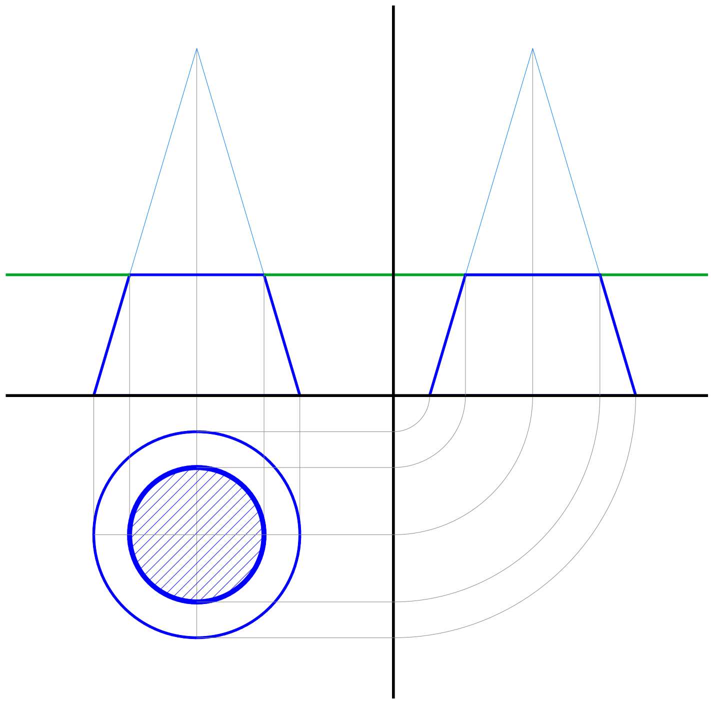
Unire con una curva i punti di sezione individuati e rappresentare l'iperbole. La curva sarà tanto più attendibile quanto più saranno i piani ausiliari paralleli alla base utilizzati per determinare i punti di sezione. Fra le sezioni coniche l'iperbole è l'unica, oltre al cerchio, che non ha necessità di essere proiettata su un piano ausiliario per poter essere rappresentata in vera forma e grandezza poiché il piano secante è, in questo caso, parallelo al piano verticale.



Schema delle proiezioni

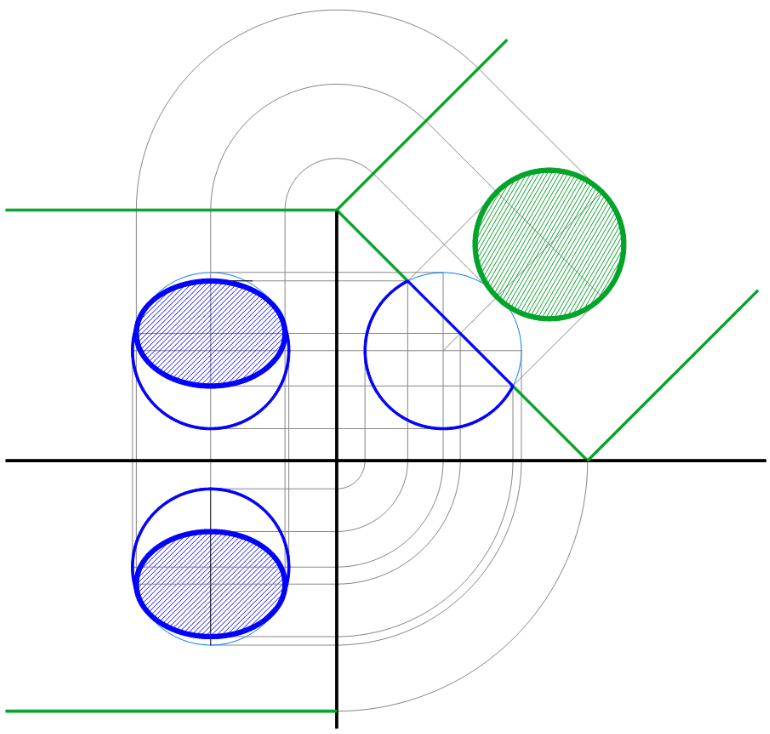


Proiezioni ortogonali | Sezioni | Approfondimenti



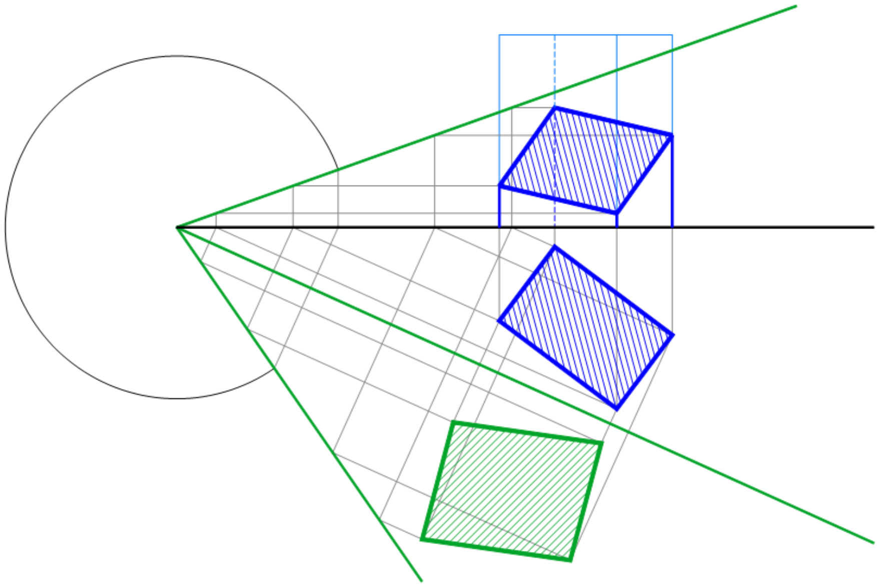
Sezione di un cono con piano secante ortogonale al suo asse

La posizione ortogonale del piano secante rispetto all'asse del cono, determina una circonferenza, che possiamo considerare a tutti gli effetti come un caso particolare di sezione conica.

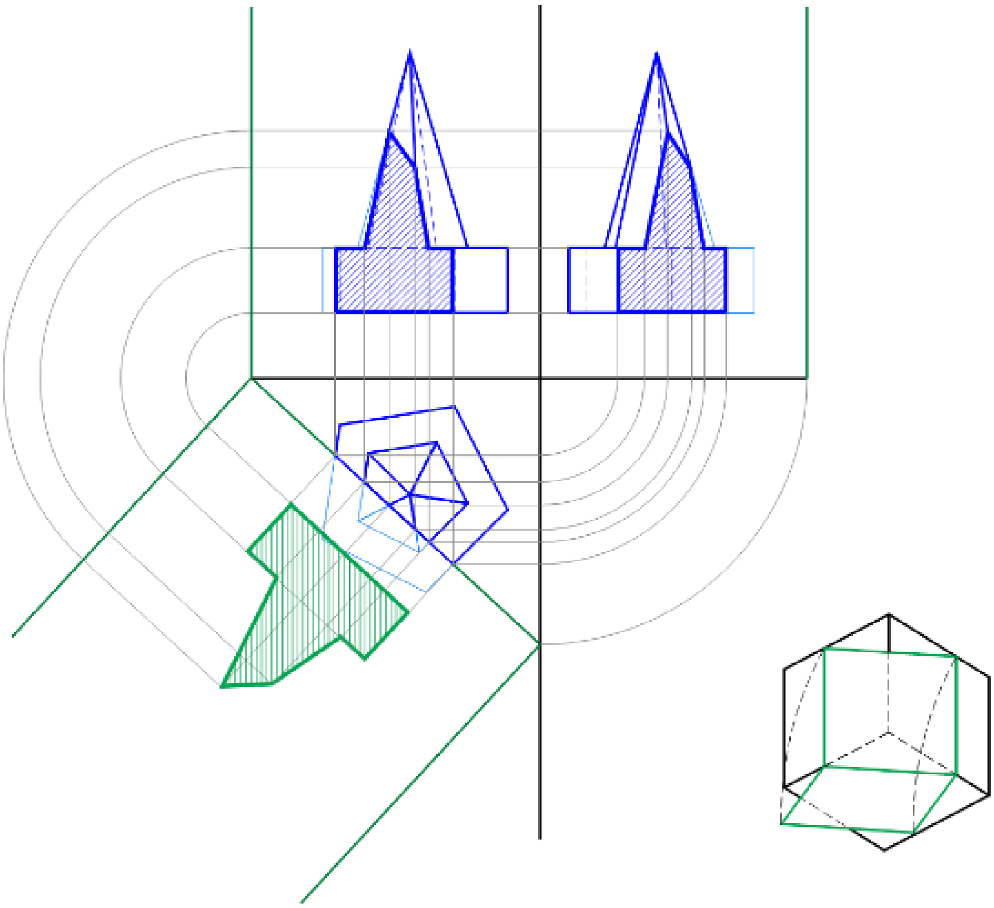


Sezione di una sfera, con un piano secante ortogonale al piano laterale e inclinato rispetto ai piani orizzontale e verticale.

Risoluzione dell'esercizio con il ribaltamento del piano secante sul piano laterale e successiva determinazione della sezione oggettiva (cerchio).



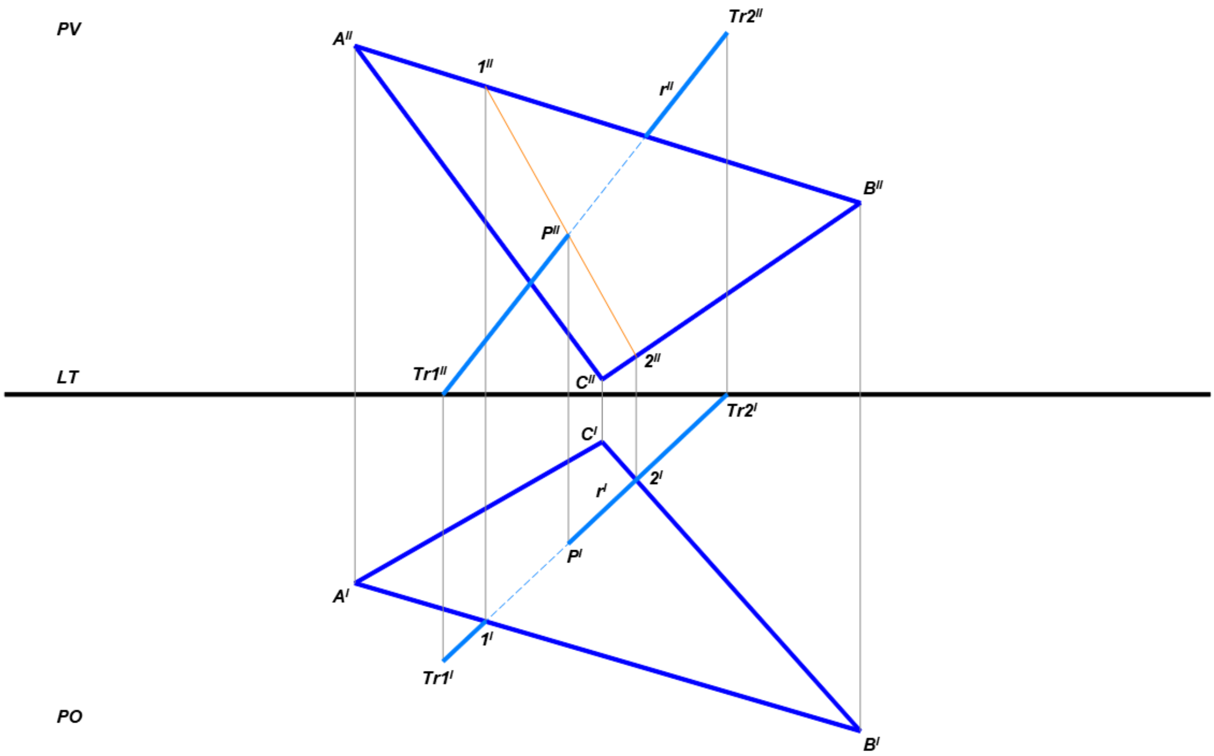
Sezione di un parallelepipedo determinata da un piano secante genericamente inclinato



Solido composto, costituito da una piramide e un prisma entrambi a base pentagonale

La base della piramide è appoggiata alla base superiore del prisma, con lato di base minore rispetto al lato del prisma. L'asse della piramide coincide con quello del prisma mentre i lati della base della piramide son paralleli rispetto ai lati delle basi del prisma.

Proiezioni ortogonali | Intersezioni



Intersezione di una retta e un triangolo genericamente inclinati

1 – Impostazione dei piani di proiezione

Tracciare la linea di terra LT che separa il PO dal PV.

2 – Proiezione del triangolo ABC

Tracciare la proiezione del triangolo ABC sul PO. Proiettare sul PV il triangolo ABC.

3 – Proiezione della retta r

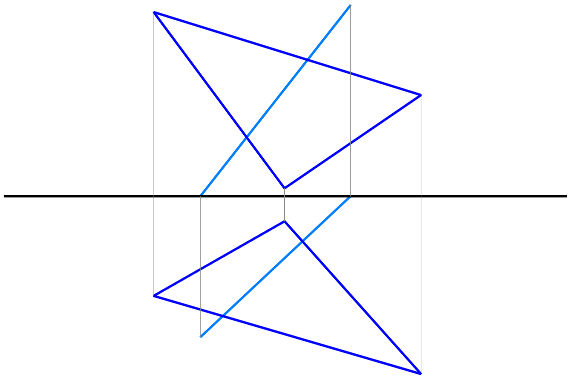
Individuare $Tr1^{I}$ e $Tr2^{I}$ tracce della proiezione r^{I} della retta r. Proiettare r^{II} individuando $Tr1^{II}$ e $Tr2^{II}$ tracce della proiezione r^{II} della retta r.

4 – Determinazione del punto P intersezione di r con il triangolo ABC

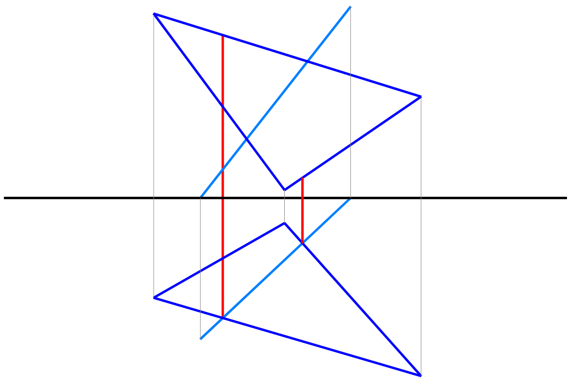
Sezionare con un piano α ortogonale al PO passante per la retta r il triangolo ABC e determinare il segmento 1-2 sul PO e sul PV. Individuare il punto P sul PV intersezione fra r e 1-2. Proiettare il punto P sul PO.

5 – Rappresentazione delle parti nascoste

Tratteggiare P^{I}-1^{I} sul PO e la parte di r compresa fra P^{II} e il lato $A^{II}B^{II}$ sul PV.

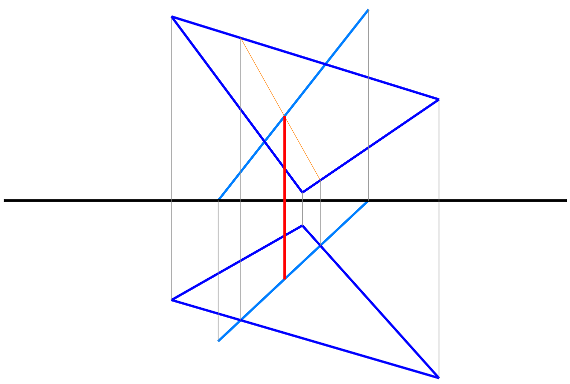


La risoluzione dell'intersezione di una retta generica con una figura piana altrettanto genericamente inclinata, ci induce a considerare il tema delle condizioni d'appartenenza fra punto e retta, e fra retta e piano. Entrambe le tracce della retta si trovano sui piani orizzontale e verticale. La sovrapposizione fra le proiezioni della retta e le proiezioni del triangolo implica che fra le due entità, con buona probabilità, si potrebbe determinare una intersezione in un punto. Ciò che si può affermare con certezza è che il punto d'intersezione, se dovesse esserci, apparterrà alla retta.

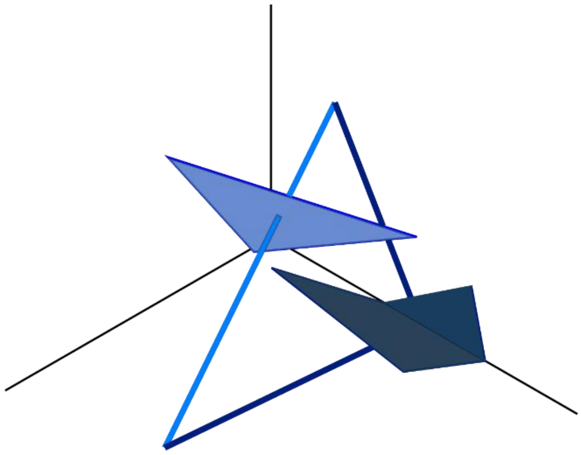


Per individuare il punto nel triangolo si ipotizza un piano secante ausiliario α, passante per la retta e ortogonale al piano orizzontale. Tracciato quindi il piano α passante per r e determinato il segmento sezione del triangolo sul piano orizzontale, proiettare gli estremi sul piano verticale.

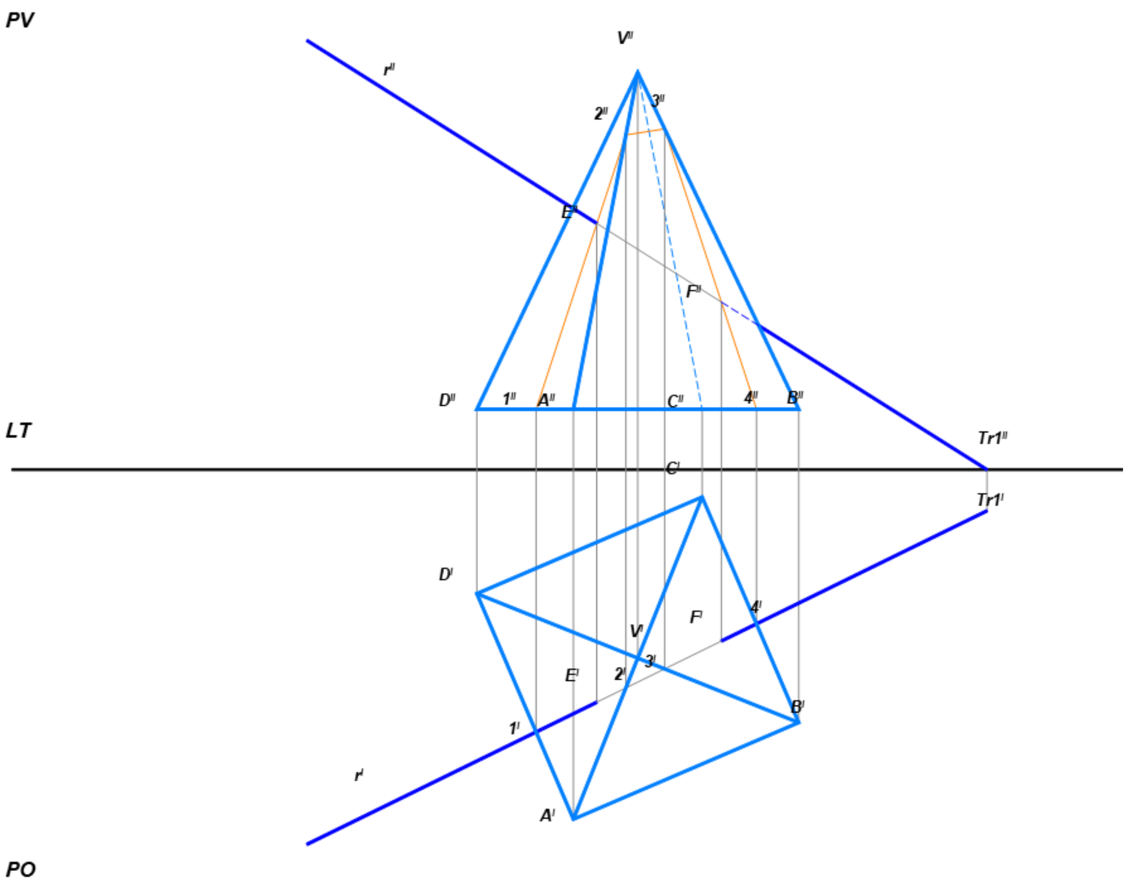
Poiché il segmento sezione sul triangolo e la retta r appartengono entrambi al piano α ne consegue che il punto d'intersezione fra queste due figure rappresenta il punto in cui la retta attraversa il triangolo. Individuato il punto di intersezione sul piano verticale si completa la rappresentazione proiettando il punto sul piano orizzontale. Tenendo conto della posizione delle tracce della retta e delle proiezioni del triangolo, si determineranno le parti a vista e nascoste della retta rispetto al triangolo.



Vista tridimensionale



Proiezioni ortogonali | Intersezioni



Intersezione di una retta inclinata e una piramide a base quadrata

1 – Impostazione della proiezione ortogonale

Tracciare la LT, linea di terra e individuare PO e PV.

2 – Proiezione sul PO

Rappresentare, in posizione generica parallela al PO, il quadrato ABCD base della piramide. Tracciare le diagonali BD, AC e individuare nell'intersezione la proiezione del vertice V.

3 – Proiezione sul PV

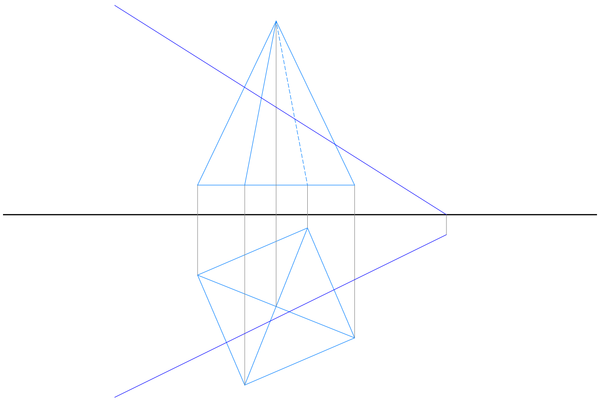
Tracciare alla quota d dalla LT la retta d'appartenenza della base ABCD. Tracciare alla quota h dalla retta della base, l'altezza del vertice della piramide. Proiettare sulla retta d'appartenenza della base sul PV i punti D e B. Proiezione della base D-B-A-C. proiettare il vertice V della piramide all'altezza d + h. Unire le proiezioni: DV, BV, AV, CV (nascosta).

4 – Proiezione della retta r

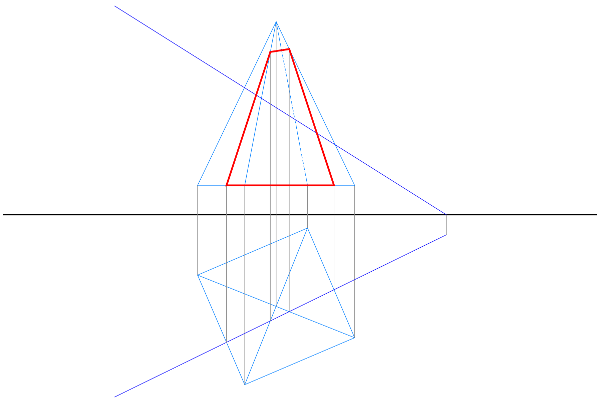
Tracciare la proiezione r^{I} della retta r individuando la traccia $Tr1^{I}$ e i punti 1, 2, 3 e 4 sulla piramide. Proiettare sul PV la traccia $Tr1^{II}$. Tracciare la proiezione r^{II} della retta r a partire dalla traccia $Tr1^{II}$.

5 – Determinazione dei punti di intersezione

Sezionare la piramide con un piano Ortogonale al PO passante per r: 1 su AD; 2 su AV; 3 su BV; 4 su BC. Unire 1-2, 2-3, 3-4. Individuare nel contorno della sezione 1234 i punti E ed F intersezioni della retta con la piramide. Proiettare sul PO E ed F. Rappresentare le parti a vista di r sul PO. Rappresentare le parti a vista della piramide sul PO. Rappresentare le parti a vista della piramide sul PV.

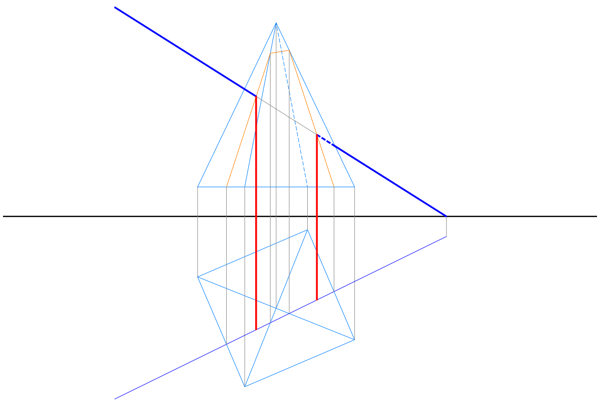


Dopo avere tracciato una piramide a base quadrata genericamente ruotata rispetto al piano verticale e una retta r genericamente inclinata, le cui proiezioni risultano sovrapposte, cerchiamo di verificare se si determinano punti d'intersezione fra le due figure. Nell'esempio in oggetto è definita la rappresentazione di un'unica traccia sul piano orizzontale.

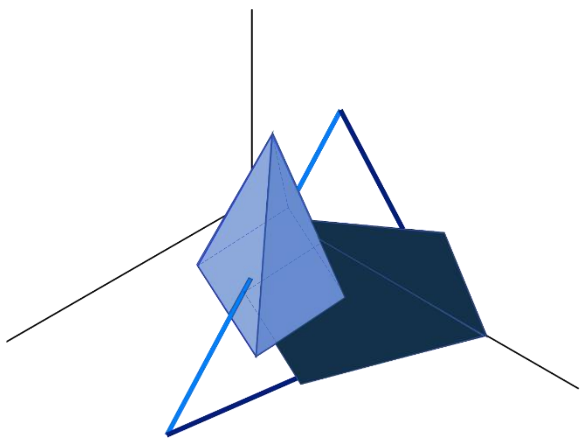


Sfruttando le condizioni d'appartenenza fra retta e piano, impostiamo un piano secante ausiliario ortogonale al piano orizzontale passante per la retta r. Procedere definendo il contorno della sezione sulla piramide e individuando i punti di contatto con la sezione. Poiché la sezione è per costruzione complanare rispetto alla retta r, gli eventuali punti di contatto, sul piano verticale, fra la sezione della piramide e la retta individuano i punti di intersezione fra le due figure.

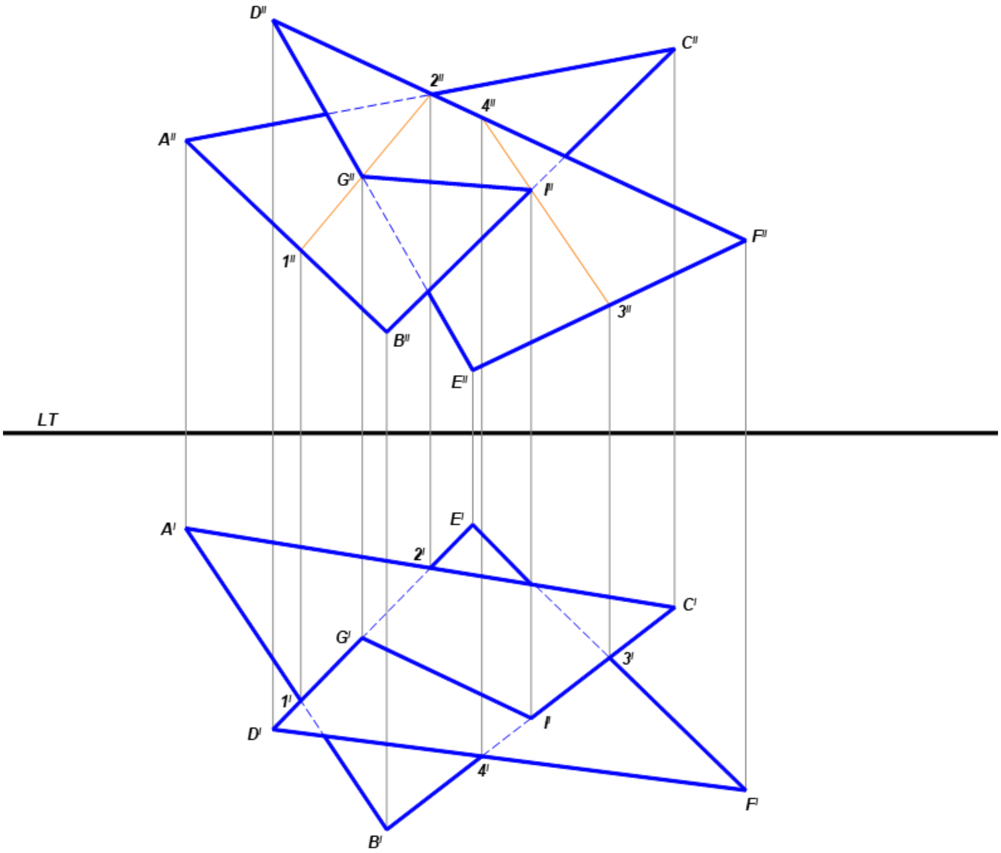
Definiti i punti d'intersezione fra retta e sezione sul piano verticale si completa la rappresentazione proiettando i due punti sul piano orizzontale. Si determineranno le parti a vista e nascoste della retta rispetto alla piramide prendendo in considerazione la posizione della traccia della retta e la posizione dei punti di intersezione nelle singole parti della piramide. In particolare se il punto di intersezione si trova in una faccia "a vista" della piramide sarà anch'esso a vista. Nel caso in cui si dovesse trovare in una parte "nascosta" della piramide, il punto sarà rappresentato di conseguenza nascosto e la porzione di retta che da quel punto si dovesse proiettare dovrà essere tratteggiata.



Vista tridimensionale



Proiezioni ortogonali | Intersezioni



Intersezione fra due triangoli scaleni genericamente inclinati

1 – Impostazione della proiezione
Impostare una doppia proiezione ortogonale, PO e PV, tracciando la linea di terra LT.

2 – Proiezione del triangolo ABC
Individuare a piacere sul PV il lato AB. Individuare a piacere C e unire con B e A. Proiettare A sul PO. Proiettare B sul PO e successivamente unire con A. Proiettare C sul PO e successivamente unire con B e con A.

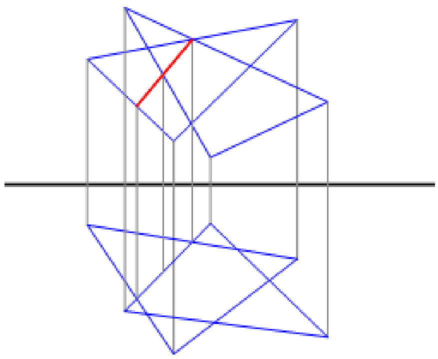
3 – Proiezione del triangolo DEF
Individuare a piacere sul PV il lato DE. Individuare a piacere F e unire con E e D. Proiettare D sul PO. Proiettare F sul PO e successivamente unire con D. Proiettare E sul PO e successivamente unire con F e D.

4 – Determinazione dei punti di intersezione
Applicando il metodo delle sezioni con piani secanti complanari ai lati si rileva che:

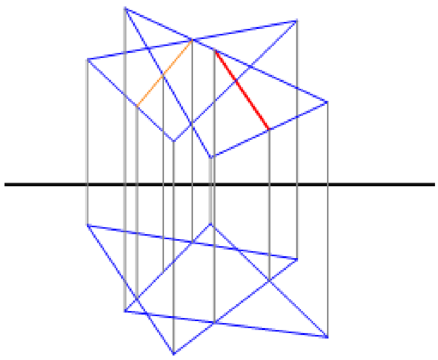
AB, AC, EF e DF NON DETERMINANO PUNTI DI INTERSEZIONE.

Impostare un piano di sezione ortogonale al PO e passante per DE e individuare i punti: 1 su AB; 2 su AC; Proiettare 1 e 2 sul PV. Unire 1 e 2 sul PV e determinare G nell'intersezione con DE. Proiettare G sul PO. Impostare un piano di sezione ortogonale al PO e passante per BC e individuare i punti: 3 su EF; 4 su DF; Proiettare 3 e 4 sul PV. Unire 3 e 4 sul PV e determinare I nell'intersezione con BC. Proiettare I sul PO. Unire GI sul PV e sul PO.

5 – Individuazione delle parti a vista e nascoste
Tracciare a vista sul PO: 1-A-C-I-G; Le parti di AB e BC non sovrapposte a DEF; G-D-F-3; Le parti di DE e FE non sovrapposte ad ABC. Completare tracciando le parti nascoste sul PO. Tracciare a vista sul PV: G-I-B-A e AC fino all'intersezione con DE; Le parti di AC e BC non sovrapposte a DEF; G-D-F-E ed ED fino all'intersezione con BC. Completare tracciando le parti nascoste sul PV.

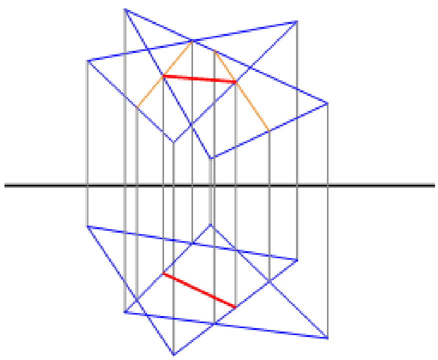


Rappresentare due triangoli scaleni con inclinazione generica le cui proiezioni sovrapposte sul piano verticale e orizzontale lasciano supporre la generazione di intersezioni fra le figure. L'intersezione di due figure piane determina al loro interno un segmento che rappresenta la parte in comune fra le due figure. La ricerca dell'intersezione consiste nella determinazione delle sezioni, eseguite con piani ortogonali al piano orizzontale e passanti per tutti i lati dei due triangoli. Procediamo quindi per tentativi fino a determinare, nell'esempio proposto, il segmento sul triangolo ABC generato dal piano secante, ortogonale al piano orizzontale, passante per il lato DE del quale si vuole individuare il punto d'intersezione.



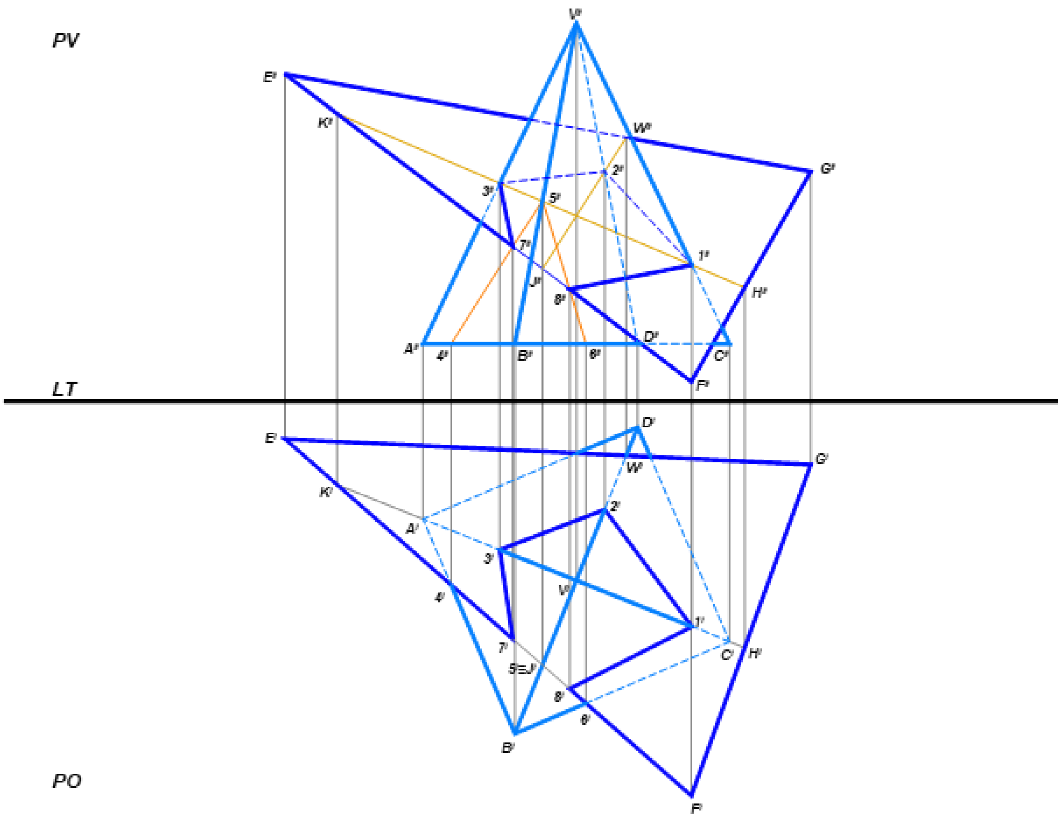
Procederemo con le stesse modalità operative per determinare la sezione sul triangolo DEF, generata dal piano secante ortogonale al piano orizzontale passante per il lato BC.

Una volta individuati, unire i punti d'intersezione e tracciare il segmento in comune fra i due triangoli. L'esercizio conferma la regola relativa alle condizioni d'appartenenza fra punto, retta e piano. Ovvero, "un punto appartiene ad un piano se appartiene ad una retta a sua volta appartenente al piano". In questo caso il punto I appartiene al lato BC, così come il lato BC appartiene per costruzione al piano secante passante per esso. Le stesse considerazioni possono formularsi per il punto G rispetto al lato DE e al piano secante passante per esso.



Vista tridimensionale

Proiezioni ortogonali | Intersezioni



Intersezione di un triangolo genericamente inclinato e una piramide

1 – Impostazione della proiezione ortogonale

Tracciare LT, linea di terra e individuare PO e PV.

2 – Proiezione sul PO

Rappresentare, in posizione generica parallelo al PO, il quadrato ABCD base della piramide. Tracciare le diagonali AC. BD e individuare nell’intersezione la proiezione del vertice V.

3 – Proiezione sul PV

Tracciare alla quota d dalla LT la retta d’appartenenza della base ABCD. Tracciare alla quota h dalla retta della base, l’altezza del vertice della piramide. Proiettare sulla retta d’appartenenza della base sul PV i punti A B C D. Proiettare il vertice V all’altezza h. Unire le proiezioni: AV, CV, BV e DV.

4 – Proiezione del triangolo scaleno EFG

Tracciare il triangolo scaleno EFG sul PO. Proiettare i vertici E, F e G sul PV.

5 – Intersezioni della piramide sul triangolo

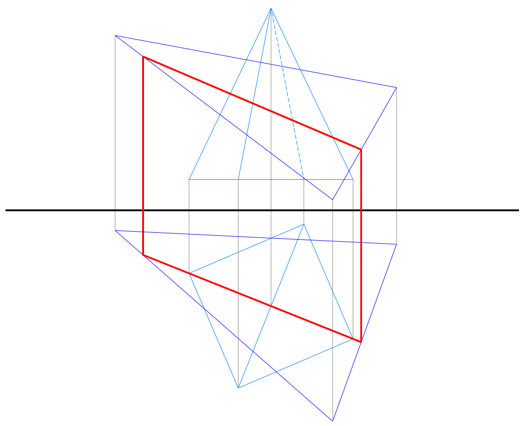
Individuare nel triangolo, HK, intersezione del piano verticale passante per AVC. Proiettare K e H sul PV. Unire HK e individuare 1 su CV e 3 su AV. Individuare nel triangolo, WJ, intersezione del piano verticale passante per BVD. Proiettare J e W sul PV. Unire JW e individuare 2 su DV.

6 – Intersezioni del triangolo sulla piramide

Sezionare la piramide con un piano verticale passante per EF. Individuare i punti: 4 su AB; 5 su BV; 6 su BC. Proiettare sul PV: 4 e 5. Unire 4-5 e individuare 7 su EF. Proiettare sul PV 6, unire 5-6 e individuare 8 su EF. Proiettare sul PO: 7, 8, 1, 2 e 3.

7 – Completamento della rappresentazione sul PO e sul PV

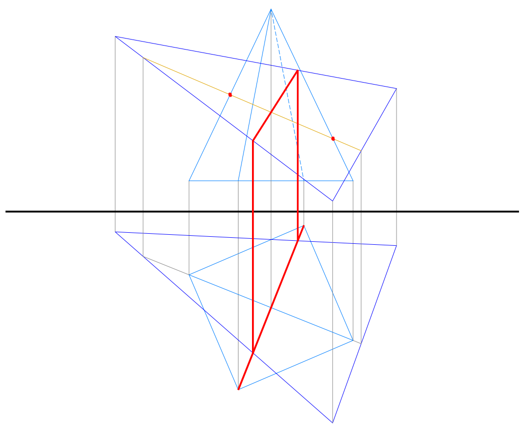
Rappresentare le parti a vista del triangolo. Rappresentare le parti a vista della piramide. Rappresentare le parti nascoste della piramide. Rappresentare le parti a vista del triangolo. Rappresentare le parti nascoste del triangolo. Rappresentare le parti a vista della piramide. Rappresentare le parti a nascoste della piramide.



Determinare la sezione del triangolo con un piano secante ortogonale al piano orizzontale passante per gli spigoli AV e CV della piramide.

Determinare la sezione del triangolo con un piano secante ortogonale al piano orizzontale passante per gli spigoli BV e DV della piramide.

Determinare la sezione della piramide generata da un piano secante ortogonale al piano orizzontale passante per il lato EF del triangolo.



Le operazioni di proiezione, si basano sulla corrispondenza biunivoca che lega fra loro gli elementi rappresentati sui diversi piani. In particolare valgono i postulati di appartenenza della geometria elementare:

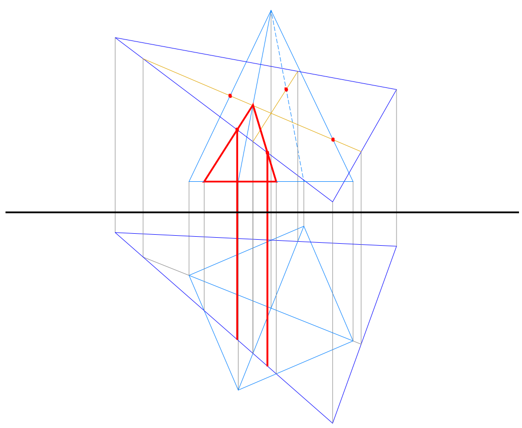
1. Due punti distinti appartengono ad una sola retta, tre punti non allineati ad un solo piano

2. Per due punti passa una sola retta

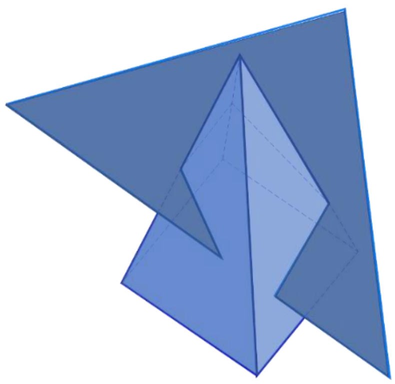
3. Tre punti non allineati appartengono ad un piano

4. Una retta e un punto distinto da essa individuano un piano

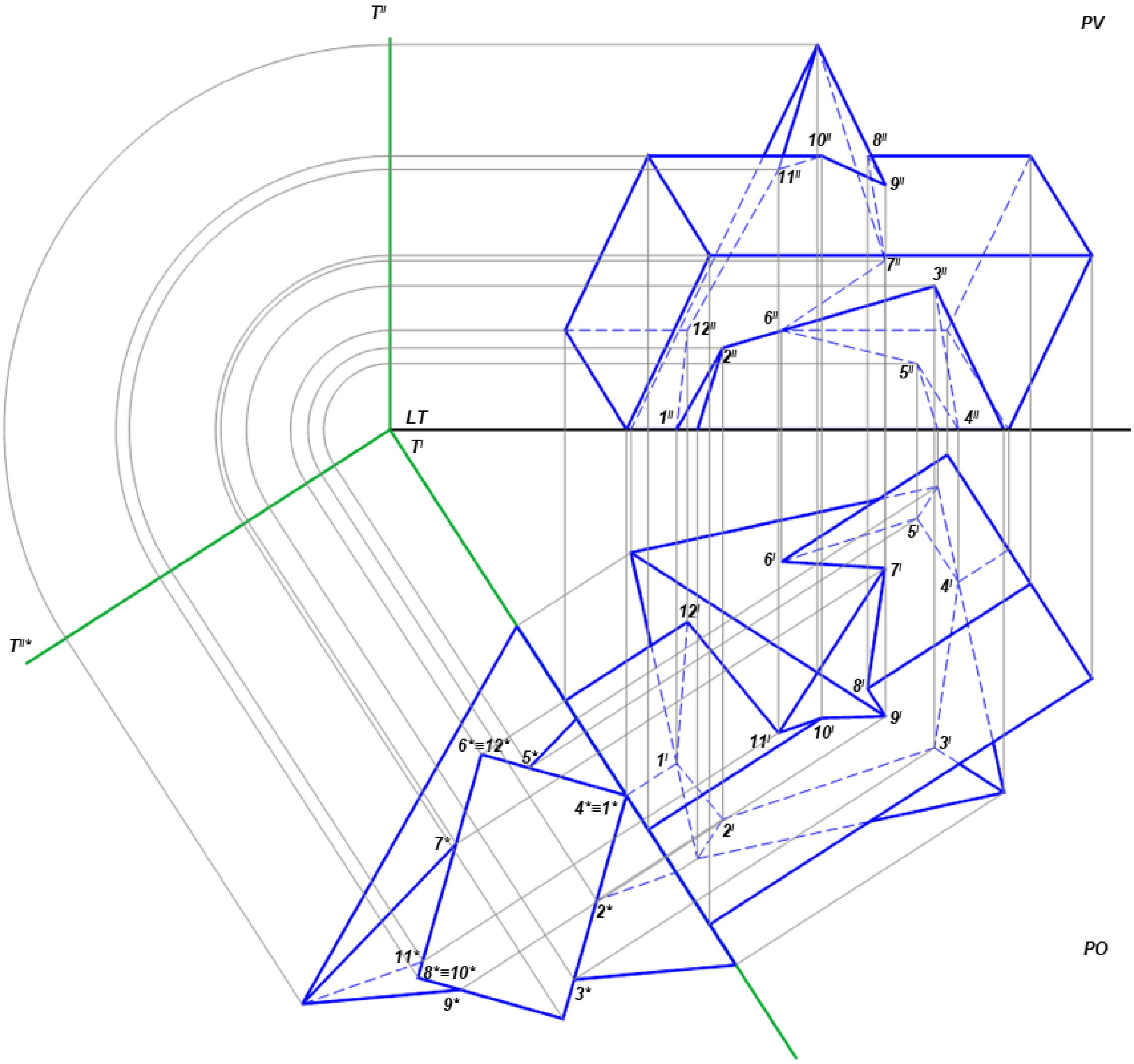
5. Una retta appartiene ad un piano se passa per due punti del piano



Vista tridimensionale



Proiezioni ortogonali | Compenetrazione di solidi



Compenetrazione di una piramide e un parallelepipedo

1 – La piramide

Tracciare la base ABCD sul piano orizzontale. Tracciare la diagonale AC. Tracciare la diagonale BD, e determinare V^I nell'intersezione con AC. Proiettare i punti A, B, C e D sul piano verticale coincidenti con la linea di terra LT. Proiettare il vertice V^I sul PV. Unire il vertice V^{II} con i punti della base A^{II} B^{II} C^{II} D^{II}: $A^{II}V^{II}$, $B^{II}V^{II}$, $D^{II}V^{II}$, $C^{II}V^{II}$. Individuare e tracciare con segno tratteggiato lo spigolo nascosto $D^{II}V^{II}$.

2 – Il parallelepipedo

Tracciare sul Piano Orizzontale, con inclinazione generica, uno spigolo laterale del parallelepipedo, in modo che il suo punto medio coincida con V^I proiezione del vertice della piramide sul PO. Impostare un piano ausiliario coincidente con una delle due basi del parallelepipedo tracciando: T^I ortogonalmente alla direzione dello spigolo laterale, passante per un estremo. T^{II} ortogonalmente alla linea di terra. T^{II}* ortogonalmente alla T^I nella intersezione con la linea di terra. Tracciare la direzione della seconda base, parallela alla direzione della prima, in precedenza tracciata, passante per l'altro estremo dello spigolo del parallelepipedo, e ad esso ortogonale. Ribaltare genericamente la base del parallelepipedo sul piano ausiliario. Proiettare i punti della base, ortogonalmente alla T^I e determinare le proiezioni sul PO delle basi EFGI e LMNO. Proiettare i punti della base, ortogonalmente alla T^{II}*. Riportare con il compasso le proiezioni puntando nell'intersezione fra il piano ausiliario e la linea di terra. Proiettare le intersezioni dei raggi proiettanti, ortogonalmente alla T^{II}. Proiettare ortogonalmente alla LT le prime proiezioni della base EFGI. Individuare nelle intersezioni corrispondenti la seconda proiezione della base EFGI. Proiettare ortogonalmente alla LT le prime proiezioni della base LMNO. Individuare nelle intersezioni corrispondenti la seconda proiezione della base LMNO. Ripassare con linea tratteggiata le linee nascoste.

3 – Completamento del piano ausiliario

Proiettare la prima proiezione ABCD ortogonalmente alla T^I. Proiettare V^{II} ortogonalmente alla T^{II}. Ribaltare l'intersezione alla stessa distanza dalla LT. Proiettare V^{II} ortogonalmente alla T^{II}*. Determinare V* proiettando V^I ortogonalmente alla T^I. Tracciare: A*V*, D*V*, B*V*, C*V*. Tratteggiare lo spigolo nascosto B*V*.

4 – Rappresentazione delle parti senza intersezioni

Ripassare le parti delle figure che in tutta evidenza non hanno intersezioni.

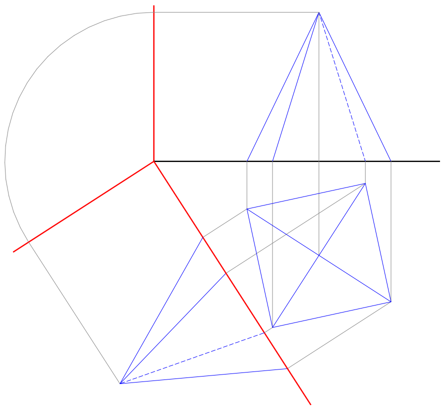
5 – Rappresentazione delle intersezioni

Proiettare dal piano ausiliario, sul PO e sul PV i punti: 9*, 3*, 11*, 2*, 7*, 5*. Determinare la sezione della piramide tracciando un piano ortogonale al PO passante per EL. Individuare e proiettare i punti di intersezione 12 e 6 punti di contatto fra il contorno della sezione e lo spigolo EL. Determinare la sezione della piramide tracciando un piano ortogonale al PO passante per FM. Individuare e proiettare i punti di intersezione 10 e 8 punti di contatto fra il contorno della sezione e lo spigolo FM.

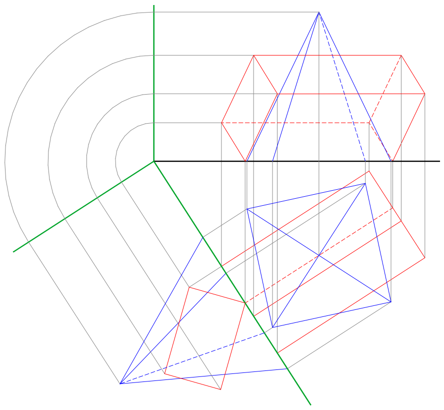
6 – Collegamento dei punti di intersezione

Unire sul PO e sul PV i punti di intersezione appartenenti allo stesso piano: 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9, 9-10, 10-11, 11-12, 12-1.

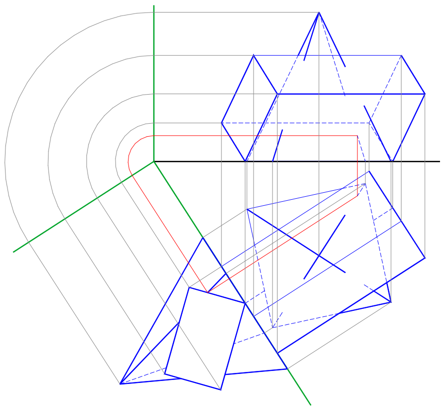
La compenetrazione di due o più solidi è la somma di volumi in una forma autonoma unica. Ogni compenetrazione è determinata da una linea detta di intersezione. Nel caso in oggetto, al fine di determinare i punti d'intersezione fra i due solidi, dopo avere rappresentato in doppia proiezione la piramide appoggiata sul piano orizzontale, impostare un piano ausiliario ortogonale al piano orizzontale che opportunamente si farà coincidere con una delle due basi del parallelepipedo. Proiettare quindi la piramide ortogonalmente alla prima traccia del piano ausiliario.



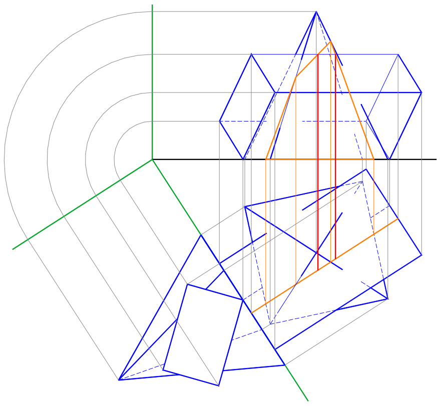
Rappresentare, sul piano orizzontale, la retta ortogonale alla prima traccia del piano ausiliario passante per la proiezione del vertice della piramide. Dopo avere rappresentato lo spigolo del parallelepipedo, disegnare a partire dall'estremo sulla prima traccia del piano ausiliario, la base rettangolare del parallelepipedo. Poiché i punti ruotano secondo piani ortogonali alla cerniera, proiettare i restanti tre punti della base rettangolare dal piano ausiliario verso il piano orizzontale. Essendo nota la lunghezza degli spigoli laterali del parallelepipedo, impostare parallelamente alla traccia del piano ausiliario la proiezione della seconda base del parallelepipedo posizionata, anch'essa come la prima, ortogonalmente rispetto al piano orizzontale. Le proiezioni mettono in evidenza le intersezioni di tre spigoli della piramide (BV, CV e DV) che intersecano il parallelepipedo e tre spigoli laterali del parallelepipedo (OI, EL e FM) che al contrario intersecano la piramide.



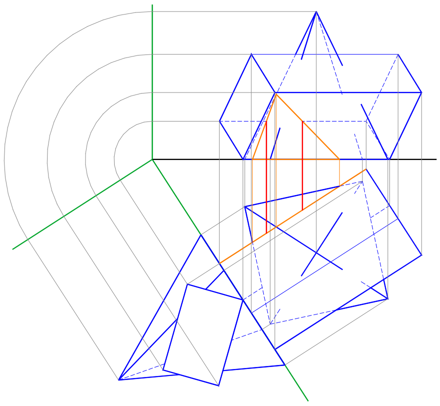
Al fine di determinare i punti di intersezione per poi successivamente unirli si applicheranno due diversi metodi. Il primo metodo, sfruttando la proiezione sul piano ausiliario della piramide e in particolare del parallelepipedo in posizione ortogonale rispetto al piano, permette di individuare in modo certo e immediato i punti di intersezione della piramide sul parallelepipedo. Infatti basterà proiettare sui piani orizzontale e verticale le intersezioni di questi spigoli sul piano ausiliario per individuarli in modo univoco e certo.



La proiezione ortogonale, compenetrazione di due o più solidi, è data dalla determinazione dei punti e delle linee di intersezione individuate dopo aver rappresentato i solidi elementari che lo costituiscono.

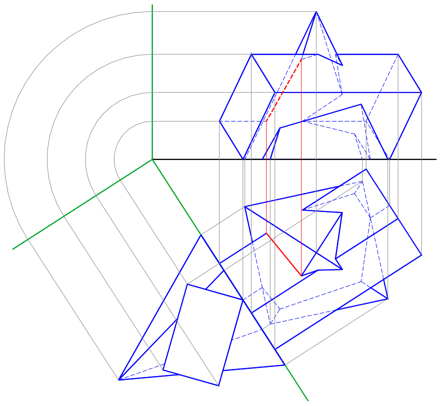


Il secondo metodo, sfrutta invece le proprietà delle sezioni e delle condizioni di appartenenza fra retta e piano già trattate precedentemente. Per determinare le intersezioni dello spigolo MF sulla piramide, realizziamo una sezione della piramide con un piano secante ortogonale al piano orizzontale e passante per MF. Poiché per costruzione MF è complanare con la sezione così determinata, i suoi punti di intersezione con il contorno della sezione saranno anche i punti di intersezione con la piramide.

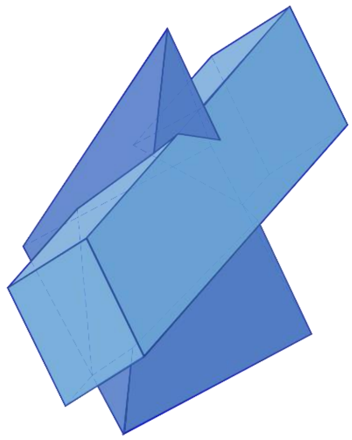


Con le stesse modalità operative e in ragione delle stesse motivazioni, si procederà alla determinazione dell'intersezione dello spigolo LE del parallelepipedo sulla piramide.
Un discorso a parte merita invece la rappresentazione delle intersezioni dello spigolo IO del parallelepipedo coincidente con il piano orizzontale, per i quali non si rende necessario determinare alcuna sezione, poiché appartenendo allo stesso piano della base della piramide, i punti di contatto si individuano in modo diretto e senza ulteriori passaggi intermedi, nelle intersezioni fra lo spigolo IO e i lati della base della piramide.

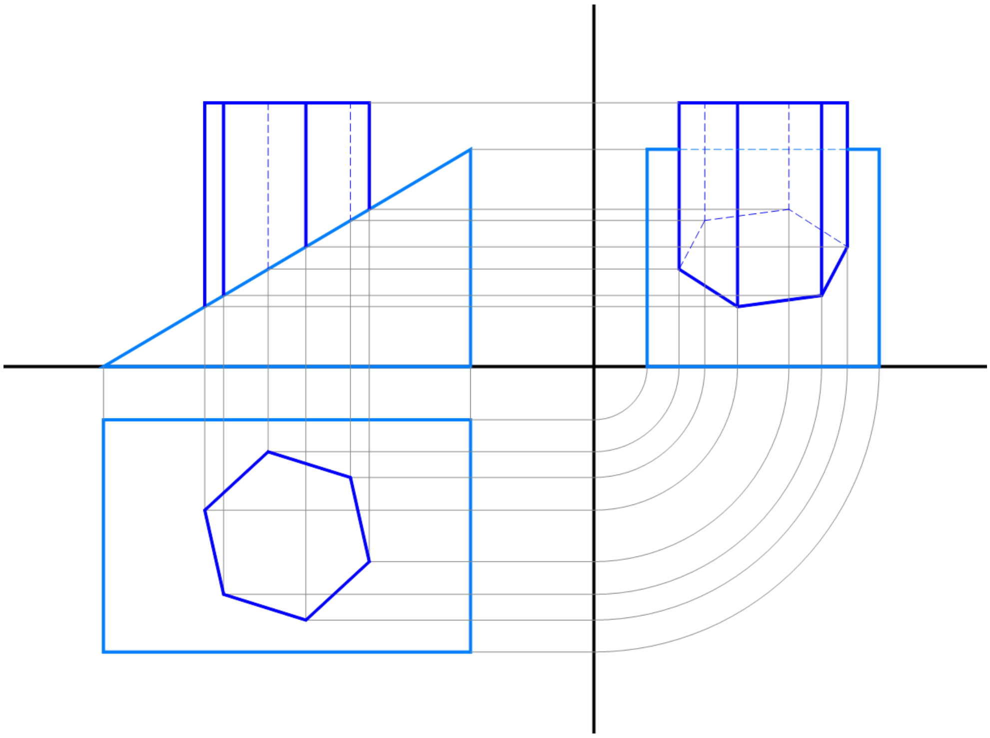
Una volta determinati tutti i singoli punti di intersezione, la rappresentazione si completa unendoli tenendo conto in particolare della contiguità e vicinanza e soprattutto dell'appartenenza al medesimo piano. Dal punto di vista grafico è opportuno ripassare con segno di linea continua le parti a vista e tratteggiare quelle nascoste, mentre è preferibile non rimarcare se non con segno di costruzione le parti interne dei solidi.



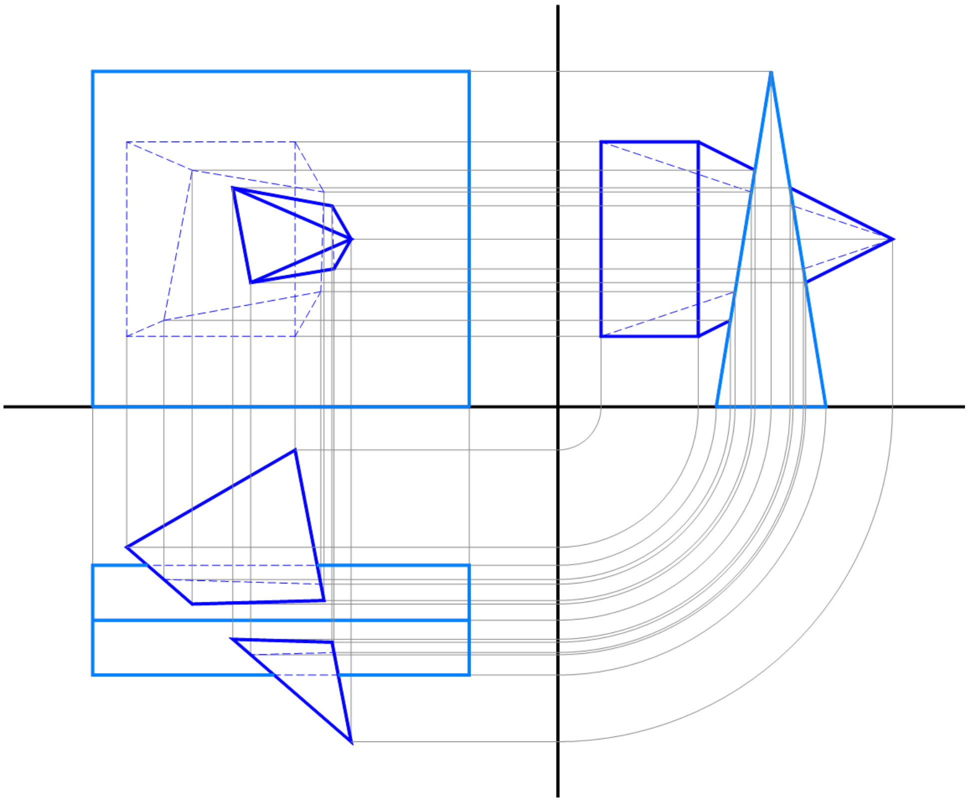
Vista tridimensionale



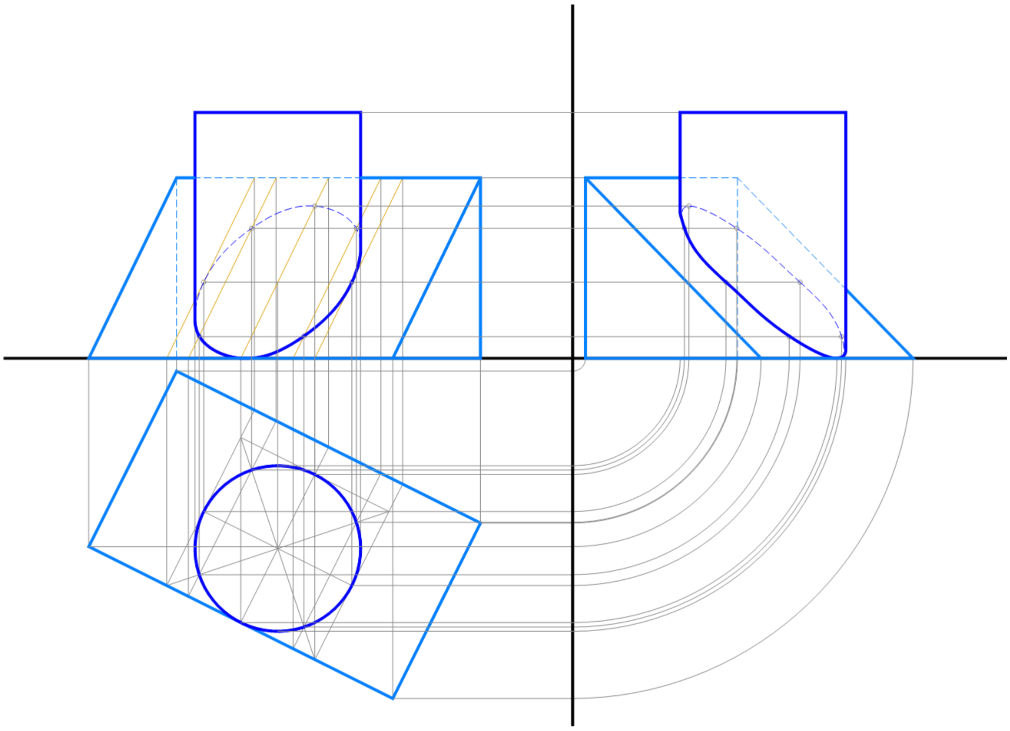
Proiezioni ortogonali | Intersezioni e compenetrazioni | Approfondimenti



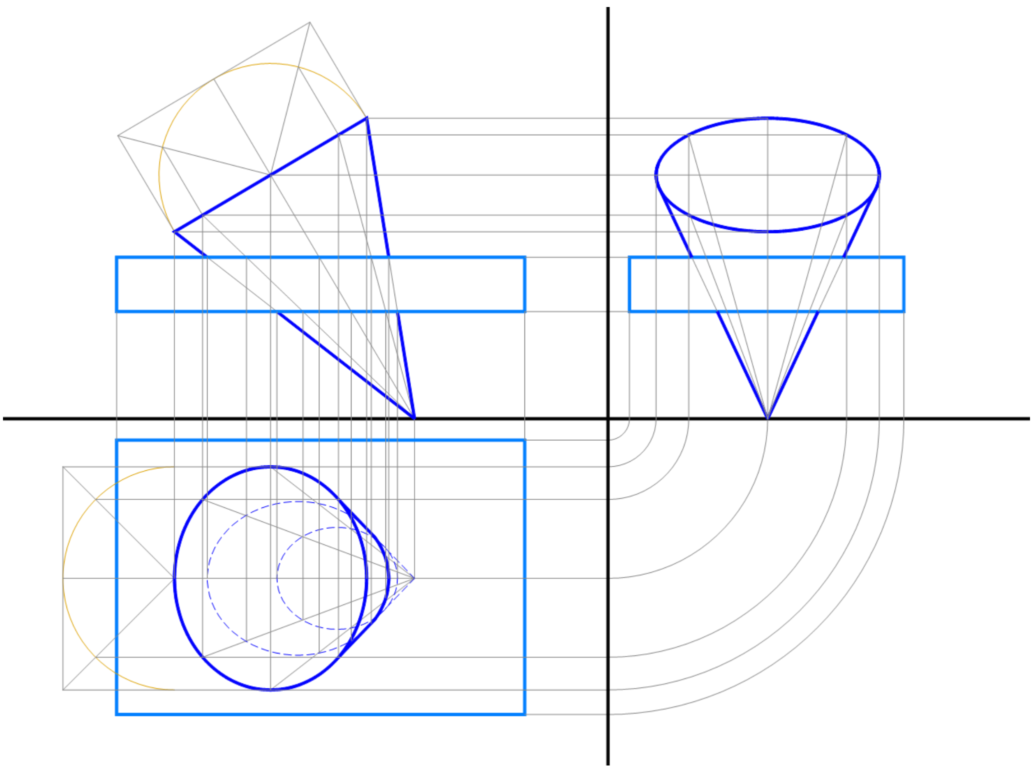
Compenetrazione di un prisma a base esagonale parallele al piano orizzontale e un prisma a base triangolare con una faccia laterale appoggiata al piano orizzontale.



Compenetrazione di una piramide a base rettangolare con asse parallelo al piano orizzontale e un prisma a base triangolare con una faccia laterale appoggiata al piano orizzontale.

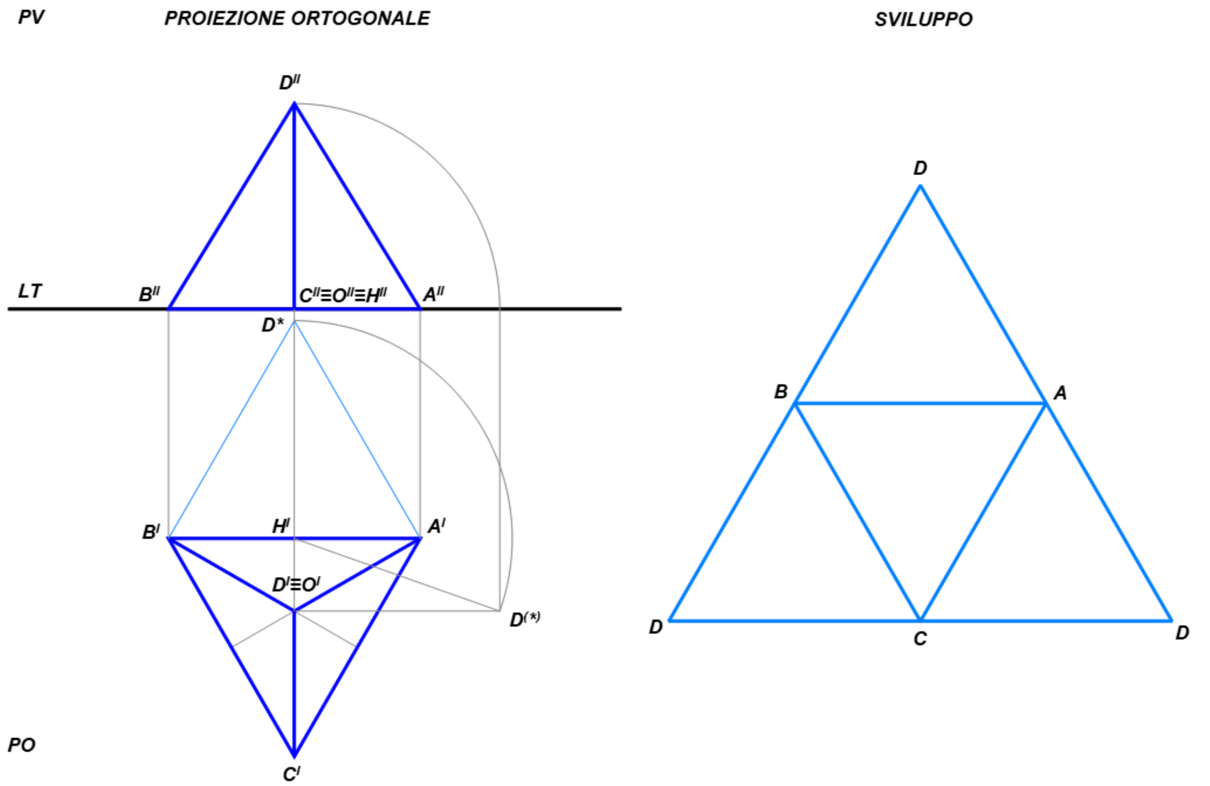


Compenetrazione di un prisma a base triangolare con una faccia laterale appoggiata al piano orizzontale e un cilindro con asse ortogonale al piano orizzontale



Compenetrazione di un cono con asse inclinato rispetto al piano orizzontale e un parallelepipedo con le facce parallele ai piani principali

Proiezioni ortogonali | Sviluppo di solidi | Poliedri regolari



Tetraedro – Proiezione e sviluppo

1 – Proiezione sul piano Orizzontale

Tracciare la linea di terra LT. Impostare la doppia proiezione su PO e PV. Tracciare sul PO la proiezione del triangolo di base $A^{I}B^{I}C^{I}$. Tracciare la bisettrice degli angoli e determinare O^{I} nell'intersezione e H^{I} su $A^{I}B^{I}$.
Individuare il vertice D e ripassare con segno di linea a vista: $A^{I}D^{I}$ - $B^{I}D^{I}$ - $C^{I}D^{I}$.

2 – Determinazione dell'altezza del tetraedro

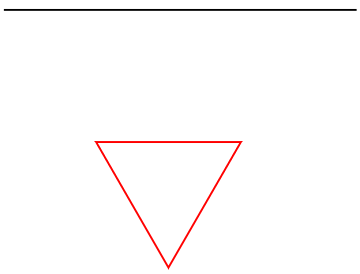
Ribaltare sul PO il triangolo ABD facendolo ruotare su $A^{I}B^{I}$. Individuare la lunghezza oggettiva $H^{I}D^{*}$. Tracciare da O^{I} il raggio ortogonale a $O^{I}H^{I}$. Puntando su H^{I} con apertura $D^{*}H^{I}$ tracciare l'arco e individuare $D^{(*)}$. Il ribaltamento del triangolo $H^{I}O^{I}D^{(*)}$ ci permette di individuare l'altezza oggettiva del tetraedro $O^{I}D^{(*)}$.

3 – Proiezione sul piano Verticale

Proiettare ortogonalmente sul PV: B-A-C-D e successivamente $D^{(*)}$. Puntando su O^{II} con apertura $O^{I}D^{(*)}$ determinare D^{II} sulla verticale per O^{II}. Ripassare sul PV il triangolo ABD. Ripassare con segno a vista CD.

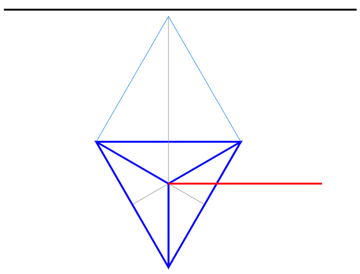
4 – Sviluppo del tetraedro regolare

Riportare sul piano il triangolo ABC. Riportare ACD ruotando su AC. Riportare BCD ruotando su BC. Completare lo sviluppo riportando BAD facendolo ruotare su BA.



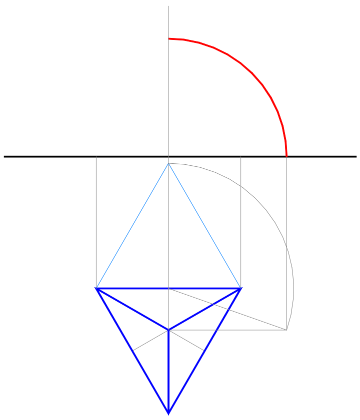
Il tetraedro regolare, poliedro composto da quattro triangoli equilateri, sei spigoli e quattro vertici, è il primo dei cinque solidi platonici. Ipotizziamo il solido appoggiato al piano orizzontale e un lato parallelo al piano verticale, in modo da poter rappresentare il triangolo di base in vera forma e grandezza.

Il problema della proiezione del tetraedro regolare si riduce alla determinazione dell'altezza, ovvero della distanza del vertice dal piano orizzontale. Al fine di determinare tale distanza si ribalta sul piano orizzontale una delle tre facce inclinate del solido facendola ruotare intorno alla cerniera rappresentata dal lato di base. A partire dal vertice, coincidente con l'ortocentro del triangolo alla base, tracciare una retta parallela alla cerniera di rotazione.

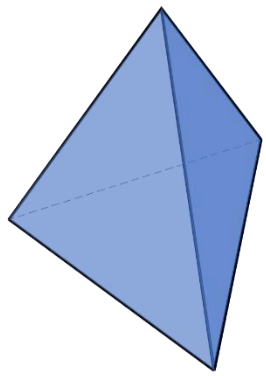


Con raggio uguale all'altezza del triangolo ribaltato, riportare l'arco fino ad intercettare la retta passante per il vertice del tetraedro e individuare l'altezza oggettiva del solido ribaltata sul piano orizzontale. Proiettare sul piano verticale e riportare la misura con un arco avente come centro l'intersezione della proiezione del vertice con la linea di terra. Individuato il vertice unire ai tre vertici di base per completare la proiezione.

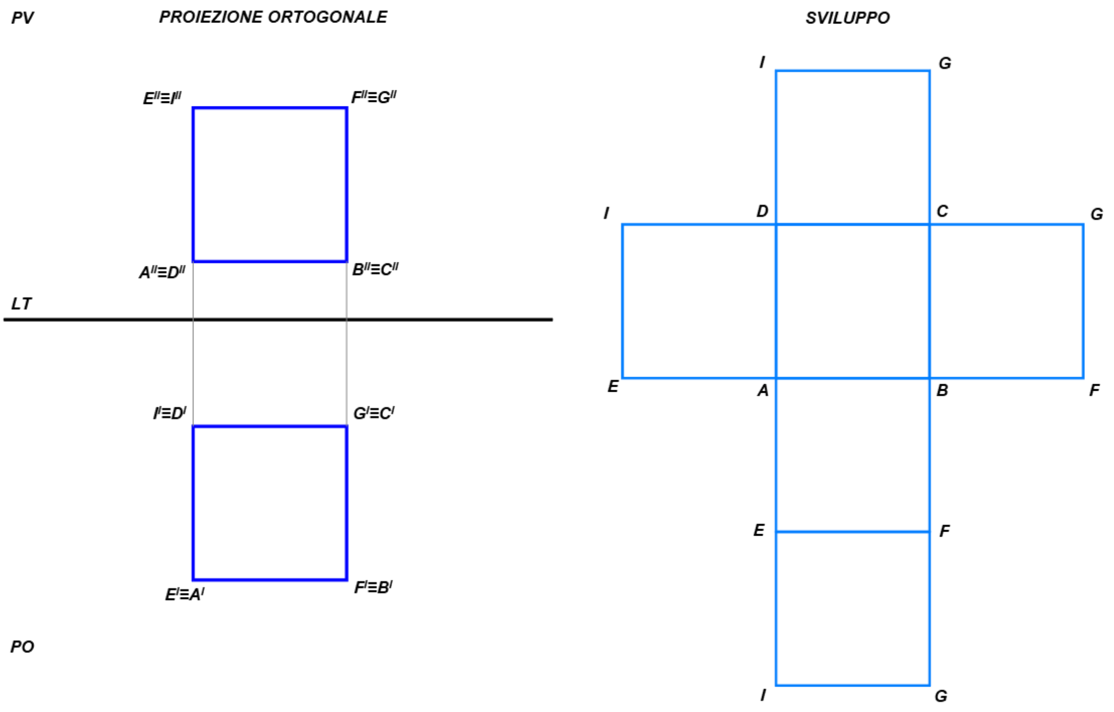
Determinare e rappresentare lo sviluppo di un solido, nell'ambito della Geometria Descrittiva, significa trasferire su un piano le superfici delle facce che lo compongono, tagliandole e scomponendole nelle singole parti senza però scollegarle completamente fra loro.



Vista tridimensionale



Proiezioni ortogonali | Sviluppo di solidi | Poliedri regolari



Esaedro – Proiezione e sviluppo

1 – Proiezione sul piano Orizzontale

Tracciare la linea di terra LT. Impostare la doppia proiezione su PO e PV. Tracciare sul PO la proiezione del cubo, di base $A^I B^I C^I D^I$.

2 – Proiezione sul piano Verticale

Proiettare ortogonalmente il cubo sul PV. Individuare la proiezione del cubo sul PV.

3 – Sviluppo

Ribaltare su un unico piano tutte le facce del solido:

ABCD

ADIE

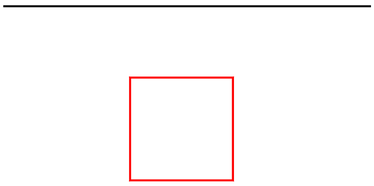
DCGI

CBFG

BAEF

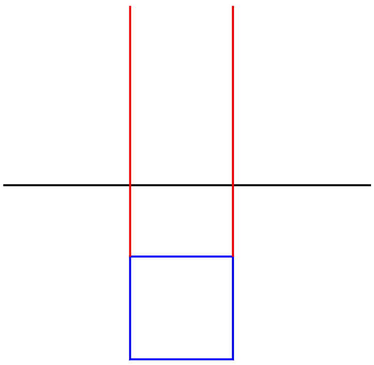
FEIG

L’esaedro è un poliedro regolare composto da sei facce quadrate, dodici spigoli e otto vertici. È, in base al numero di facce, il secondo dei cinque solidi platonici. Ipotizziamo, per semplificare la proiezione, il solido con le facce parallele ai piani orizzontale e verticale. Rappresentare sul piano orizzontale, secondo i criteri prima esposti, il quadrato che costituisce la proiezione dell’esaedro.

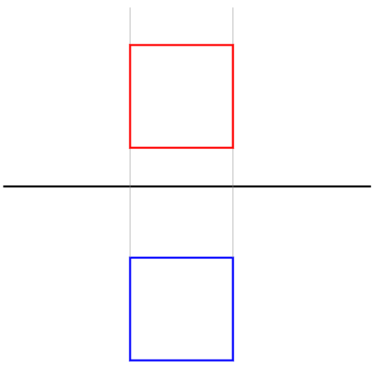


Proiettare i vertici allineati dell’esaedro sul piano verticale.

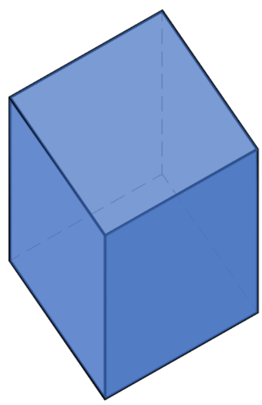
Tracciare, in corrispondenza dei raggi proiettanti, il quadrato proiezione sul piano verticale del tetraedro.



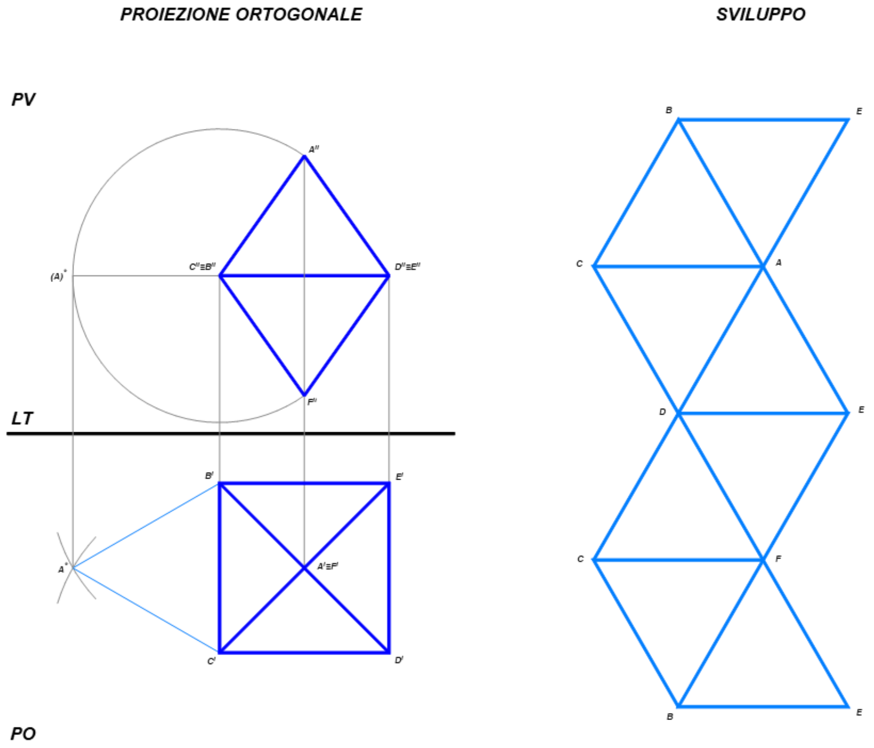
Il termine solido platonico, sinonimo di poliedro convesso regolare, indica un poliedro che ha per facce poligoni regolari congruenti. Esistono solo cinque poliedri convessi regolari: tetraedro, esaedro (cubo), ottaedro, dodecaedro e icosaedro. Il nome di ogni figura deriva dal numero delle sue facce (4, 6, 8, 12, e 20). La costruzione dei poliedri regolari è fortemente connotata dai numeri 3, 4 e 5. Infatti solo il triangolo equilatero, il quadrato e il pentagono regolare possono costituire facce di poliedri regolari mentre nei vertici possono concorrere 3, 4 o 5 lati delle facce del poliedro.



Vista tridimensionale



Proiezioni ortogonali | Sviluppo di solidi | Poliedri regolari



Ottaedro – Proiezione e sviluppo

1 – Impostazione della proiezione

Impostare una doppia proiezione ortogonale, PO e PV, tracciando la linea di terra LT.

2 – Proiezione sul piano Orizzontale

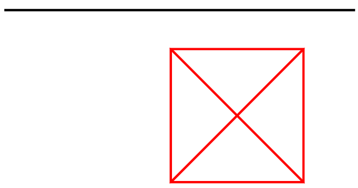
Tracciare il quadrato BCDE. Tracciare le diagonali BD e CE, individuando nell’intersezione la proiezione $A^I \equiv F^I$. Ribaltare parallelamente al PO il triangolo ABC, facendolo ruotare sulla cerniera B^IC^I. Puntare in B^I con apertura B^IC^I. Puntare in C^I con apertura BC e determinare A*. Unire A^*B^I e A^*C^I.

3 – Proiezione sul piano Verticale

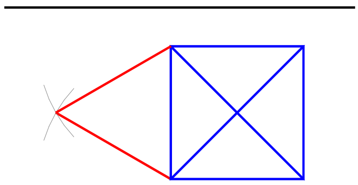
Tracciare sul PV parallelamente alla LT il piano d’appartenenza degli spigoli BCDE. Proiettare sulla retta di riferimento: C^IB^I - D^IE^I. Proiettare sul PV i vertici A^I e F^I. Proiettare A* sul piano d’appartenenza di BCDE. Con apertura di compasso pari all’altezza del triangolo ABC puntare su $C^{II}B^{II}$ e tracciare un ampio arco e individuare A^{II} ed F^{II}. Unire A^{II} ed F^{II} con $C^{II}B^{II}$ e $D^{II}E^{II}$.

4 – Sviluppo

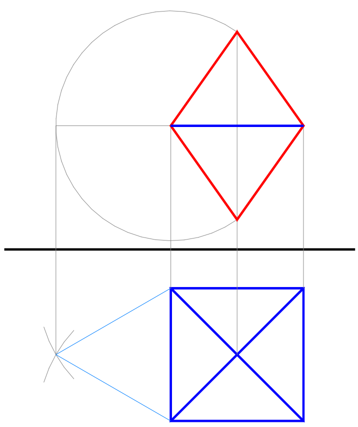
Ribaltare su un unico piano tutte le facce del solido: ABE, DEF, ABC, CDF, ACD e BCF.



L’ottaedro, poliedro regolare, il terzo dei solidi platonici è composto da 8 facce, 12 spigoli e 6 vertici. Le facce sono costituite da triangoli equilateri e per la sua caratteristica forma è detto anche bipiramide poiché costituito da due piramidi con l’asse sulla stessa retta d’appartenenza e le basi quadrate coincidenti. In mancanza di indicazioni specifiche, rappresentiamo il solido nella posizione più favorevole, ovvero con l’asse ortogonale al piano orizzontale un lato della base parallelo al piano verticale. Tracciare il quadrato di base e successivamente le due diagonali rappresentanti gli spigoli inclinati della piramide a vista, le cui parti risultano perfettamente coincidenti con quelle della piramide inferiore nascosta.

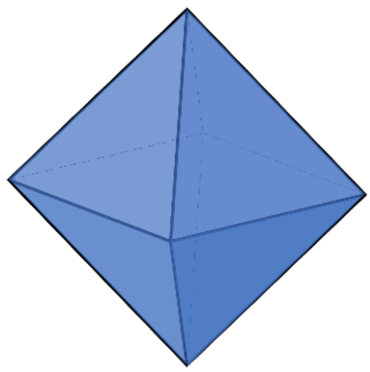


Al fine di determinare l’altezza della piramide, occorre ribaltare una faccia triangolare parallelamente al piano orizzontale. Con apertura pari al lato del quadrato di base della piramide, riportare il vertice del triangolo equilatero ribaltato.

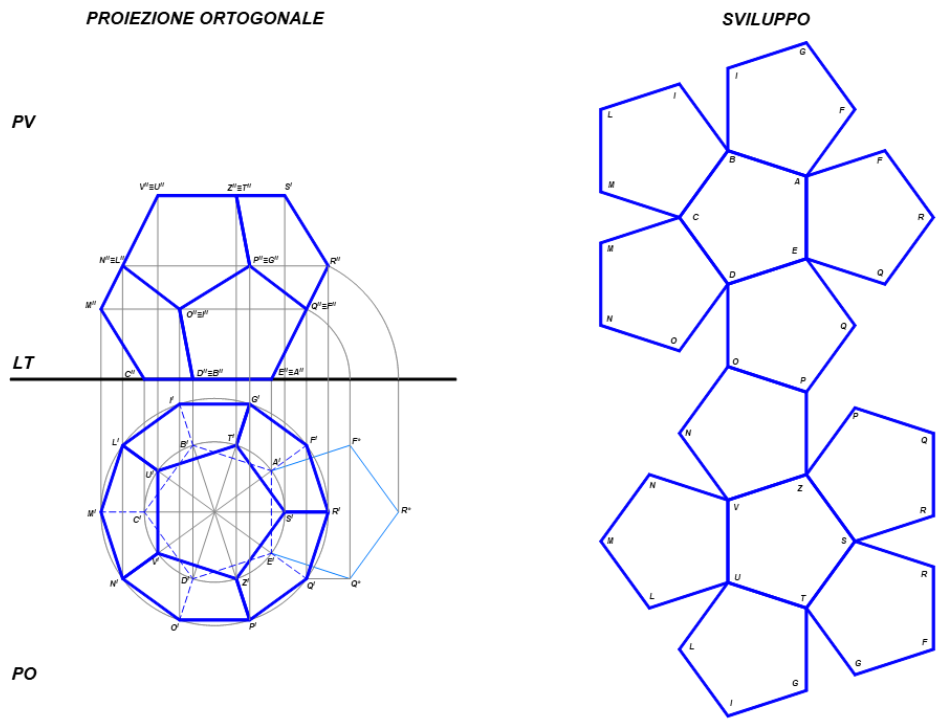


Fissare a piacere la quota della base delle due piramidi e proiettare il lato di base sul piano verticale. Riportare successivamente sullo stesso livello il vertice del triangolo precedentemente ribaltato sul piano orizzontale. Tenendo conto che, come più volte dimostrato, i punti ruotano mantenendo la stessa distanza dalla cerniera, riportare con un ampio arco, sia nella parte superiore che inferiore, alla stessa distanza dalla cerniera del ribaltamento, i due vertici sulla direzione dell’asse delle due piramidi. Unire i vertici, così individuati, con la base quadrata e completare la proiezione dell’ottaedro.

Vista tridimensionale



Proiezioni ortogonali | Sviluppo di solidi | Poliedri regolari



Dodecaedro – Proiezione e sviluppo

1 – Impostazione della proiezione

Impostare una doppia proiezione ortogonale, PO e PV, tracciando la linea di terra LT.

2 – Proiezione sul piano Orizzontale

Tracciare il pentagono regolare ABCDE. Ribaltare sul PO il pentagono AEQRF facendolo ruotare intorno al lato AE. Tracciare le direzioni che dal centro 0 del pentagono passano per i vertici ABCDE.

Tracciare le direzioni che dal centro 0 passano per i punti medi dei lati del pentagono ABCDE. Proiettare i punti ABCDE sulla linea di terra. Proiettare, ortogonalmente alla cerniera AE, il punto Q* e determinare Q^{I} nell'intersezione con il raggio passante per E. Proiettare, Q^{I} sul PV. Proiettare Q*F* sulla LT. Puntando il compasso su $E^{II} \equiv A^{II}$ ruotare e determinare $Q^{II}F^{II}$ sul raggio passante per Q^{I}. Tracciare la retta passante per $E^{II} \equiv A^{II}$ e $Q^{II}F^{II}$. Proiettare R* sulla LT.

Puntando il compasso su $E^{II} \equiv A^{II}$ ruotare e determinare R^{II} sulla retta passante per $E^{II} \equiv A^{II}$ e $Q^{II}F^{II}$. Proiettare R^{II} sul PO e determinare R^{I}. Tracciare il cerchio di centro 0 che circoscrive ABCDE. Tracciare il cerchio di centro 0 di raggio $0Q^{I}$ o $0R^{I}$. Individuare nell'intersezione fra il cerchio di raggio 0A e le direzioni convergenti in 0, i punti: STUVZ. Individuare nell'intersezione fra il cerchio di raggio 0R e le direzioni convergenti in 0: LMN - pentagono ULMNV; NOP - pentagono VNOPZ; PQR - pentagono ZPQRS; RFG - pentagono SRFGT; GIL – pentagono TGILU. Completamento degli spigoli nascosti: AF – BI – CM – DO – EQ. Completamento del contorno esterno a vista. Completamento delle parti interne.

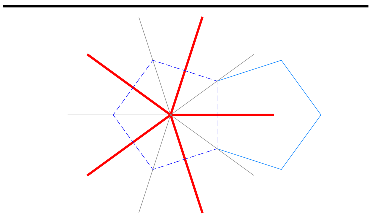
3 – Proiezione sul piano Verticale

Tracciare la direzione orizzontale passante per $Q^{II}F^{II}$. Tracciare il raggio proiettante per M^{I} e individuare M^{II}. Tracciare $C^{II}M^{II}$. Proiettare OI sul PV. Tracciare OD. Tracciare la retta orizzontale passante per R^{II}. Proiettare NL sul PV. Tracciare la retta passante per M^{II} e $N^{II} \equiv L^{II}$. Proiettare P≡G sul PV. Proiettare V≡U sul PV nell'intersezione con la retta passante per M-N≡L. Tracciare la retta orizzontale passante per $V^{II} \equiv U^{II}$. Proiettare S sul PV. Determinare $Z^{II} \equiv T^{II}$ sul PV.

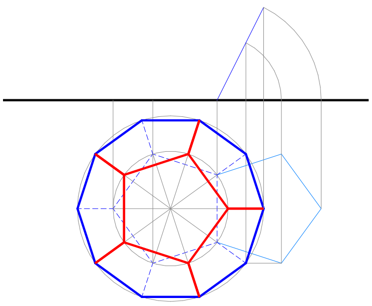
Tracciare lo spigolo PZ. Rappresentare a vista il contorno esterno della proiezione. Rappresentare a vista le parti interne della proiezione.

4 – Sviluppo

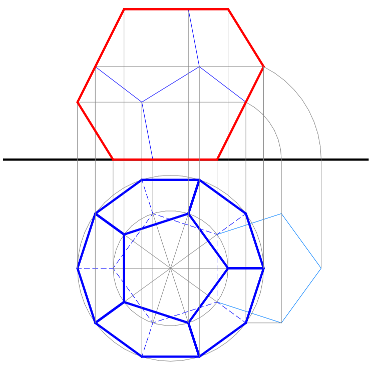
Ribaltare su un unico piano tutte le facce del solido: ABCDE; PONVZ; AEQRF; ZVUTS; AFGIB; UVNML; BILMC; TULIG; CMNOD; STGFR; EDOPQ; ZSRQP.



Il **dodecaedro,** quarto poliedro regolare convesso composto da 12 facce che sono pentagoni regolari, 20 vertici e 30 spigoli. Dopo avere rappresentato la base pentagonale inferiore del poliedro, riconoscibile poiché tratteggiata, tracciare le direzioni ortogonali ai lati e passanti per il vertice opposto. Ribaltare successivamente una faccia laterale intorno alla cerniera rappresentata dal lato in comune ai due pentagoni.

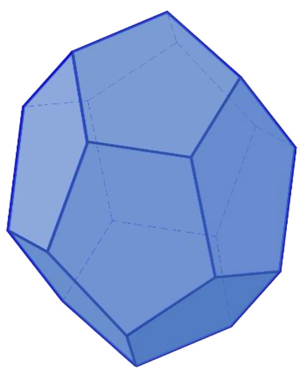


Dopo avere proiettato la base sul piano verticale, tenendo conto che i punti ruotano secondo piani ortogonali alla cerniera, determinare la proiezione degli spigoli nell'intersezione con i raggi passanti per gli estremi della base. Proiettare sul piano verticale il punto così ottenuto e tracciare la retta d'appartenenza della base pentagonale in vista di profilo sul piano verticale. Se consideriamo che gli estremi delle facce pentagonali sul piano orizzontale mantengono la medesima distanza dal centro, sarà sufficiente, al fine di determinarne la proiezione, individuare l'intersezione fra la circonferenza con centro nel baricentro del pentagono di base e raggio passante per la proiezione dello spigolo determinato sul piano orizzontale. Con la stessa procedura determineremo la proiezione della base pentagonale superiore, tracciando una circonferenza di raggio uguale alla distanza del baricentro del pentagono dagli estremi del pentagono della base inferiore, intersecata dalle direzioni ortogonali ai lati della base inferiore e il centro dello stesso pentagono.

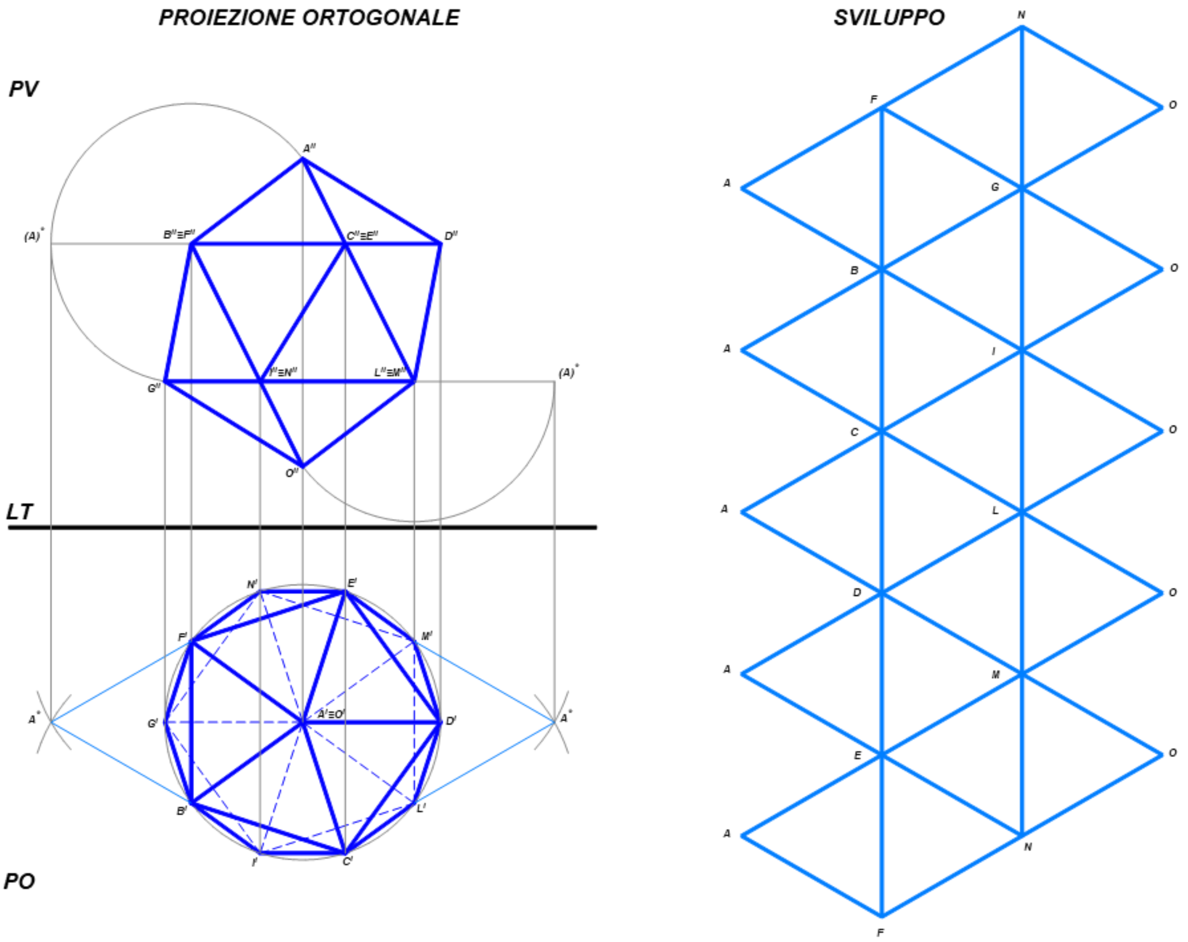


Unire i punti tenendo conto delle facce nascoste sul piano orizzontale mentre la proiezione sul piano verticale non presenta, per effetto delle sovrapposizioni delle facce, parti del poliedro nascoste.

Vista tridimensionale



Proiezioni ortogonali | Sviluppo di solidi | Poliedri regolari



Icosaedro – Proiezione e sviluppo

1 – Impostazione della proiezione

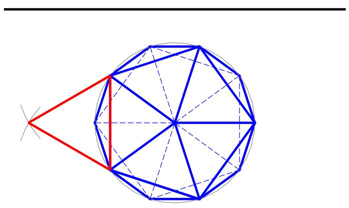
Impostare una doppia proiezione ortogonale, PO e PV, tracciando la linea di terra LT.

2 – Proiezione sul piano Orizzontale

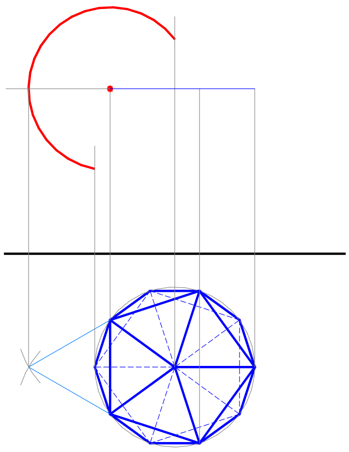
Tracciare il pentagono regolare BCDEF inscritto nella circonferenza di centro $A^{I}\equiv O^{I}$. Unire A con i vertici B-C-D-E-F. Tracciare da A le perpendicolari ai lati del pentagono fino ad intersecare la circonferenza nei punti: G-I-L-M-N. Tracciare il pentagono GILMN. Unire con tratto di linea a vista i punti: B-I-C-L-D-M-E-N-F-G. Ripassare con tratto a vista il pentagono BCDEF e gli spigoli AB-AC-AD-AE-AF. Completamento della proiezione sul PO.

3 – Proiezione sul piano Verticale

Ribaltare parallelamente al PO il triangolo ABF facendolo ruotare intorno alla cerniera BF. Tracciare la quota orizzontale del pentagono BCDEF. Proiettare sulla retta i punti: $B^{II}\equiv F^{II}$ - $C^{II}\equiv E^{II}$ - D^{II}. Tracciare il raggio proiettante passante per $A^{I}\equiv O^{I}$ e per G^{I}. Proiettare A* sulla quota di BCDEF. Puntare in $B^{II}\equiv F^{II}$ tracciare un arco di raggio B^{II} A* e individuare G^{II} e A^{II}. Unire i punti: A^{II} B^{II}, B^{II} G^{II}, A^{II} C^{II}, A^{II} D^{II}. Tracciare la quota orizzontale del pentagono GILMN e proiettare i vertici: $I^{II} \equiv N^{II}$, $L^{II} \equiv M^{II}$ Unire i punti: B^{II} I^{II}, C^{II} I^{II}, C^{II} L^{II}, D^{II} L^{II}. Ribaltare parallelamente al PO il triangolo OLM facendolo ruotare intorno alla cerniera LM. Proiettare A* sulla quota di GILMN. Puntare in $L^{II}\equiv M^{II}$ tracciare un arco di raggio L^{II} A* e individuare O^{II}. Unire i punti: G^{II} O^{II}, $I^{II}\equiv N^{II}$ O^{II}, $L^{II}\equiv M^{II}$ O^{II}. Ripassare a vista il contorno esterno della proiezione. Ripassare le parti interne a vista. Completamento della proiezione sul PV.

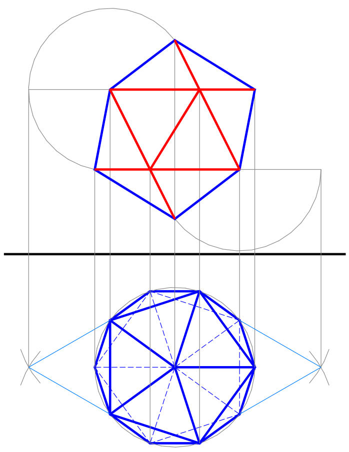


L'icosaedro, quinto poliedro regolare, è composto da 20 facce, costituite da triangoli equilateri, 30 spigoli e 12 vertici. Dopo avere rappresentato, con segno di linea nascosta, i cinque triangoli equilateri della parte inferiore del poliedro a formare un pentagono regolare, tracciare un cerchio con perno sul baricentro del pentagono e raggio uguale alla distanza del centro dai vertici del pentagono. Sul piano orizzontale i triangoli della parte superiore saranno individuati unendo il vertice alto del poliedro, centro del pentagono, con le intersezioni della circonferenza con gli assi dei lati del pentagono. La determinazione dell'altezza del vertice superiore inizia con il ribaltamento di una faccia laterale triangolare intorno ad un lato di base rappresentato in vera grandezza.

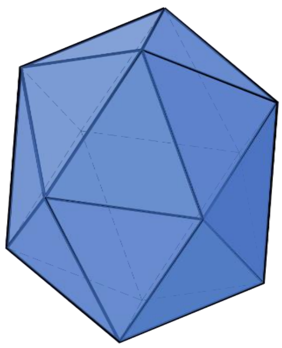


Facendo perno sulla cerniera, ribaltare sul piano verticale l'altezza del triangolo equilatero riportandola sui due triangoli adiacenti alla cerniera utilizzata per il ribaltamento. Si determinerà in questo modo il vertice alto del poliedro e lateralmente la quota dei triangoli della parte inferiore.

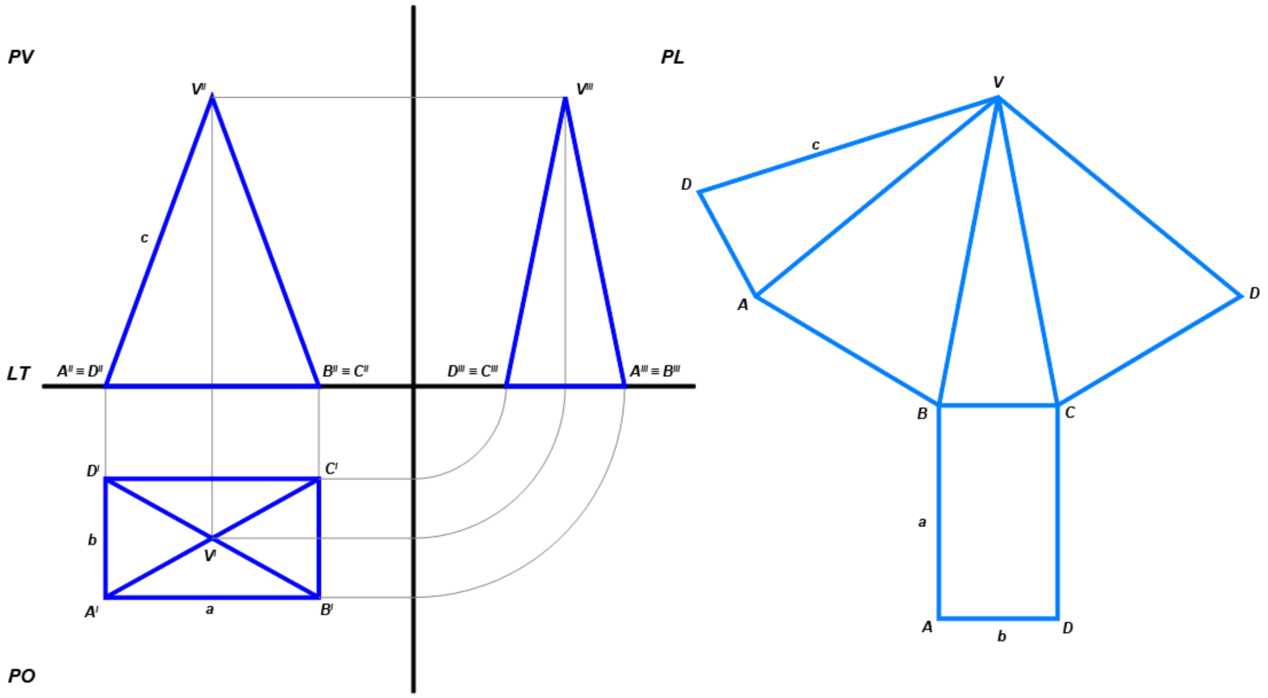
Ripetere l'ultima fase ribaltando il triangolo laterale sul piano orizzontale e a seguire, sul piano verticale l'altezza nella parte inferiore del solido individuando nell'asse il vertice basso del poliedro. Unendo i vertici così ottenuti si completa la proiezione che per la particolare posizione di partenza non presenta, nella proiezione sul piano verticale, parti nascoste.



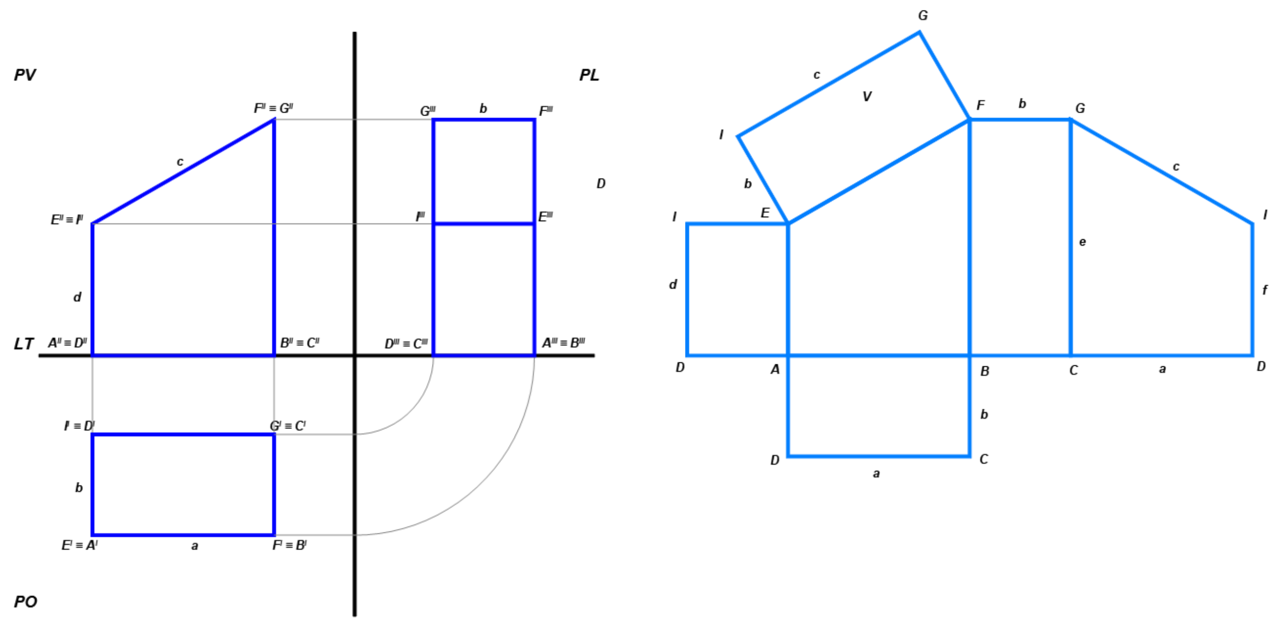
Vista tridimensionale



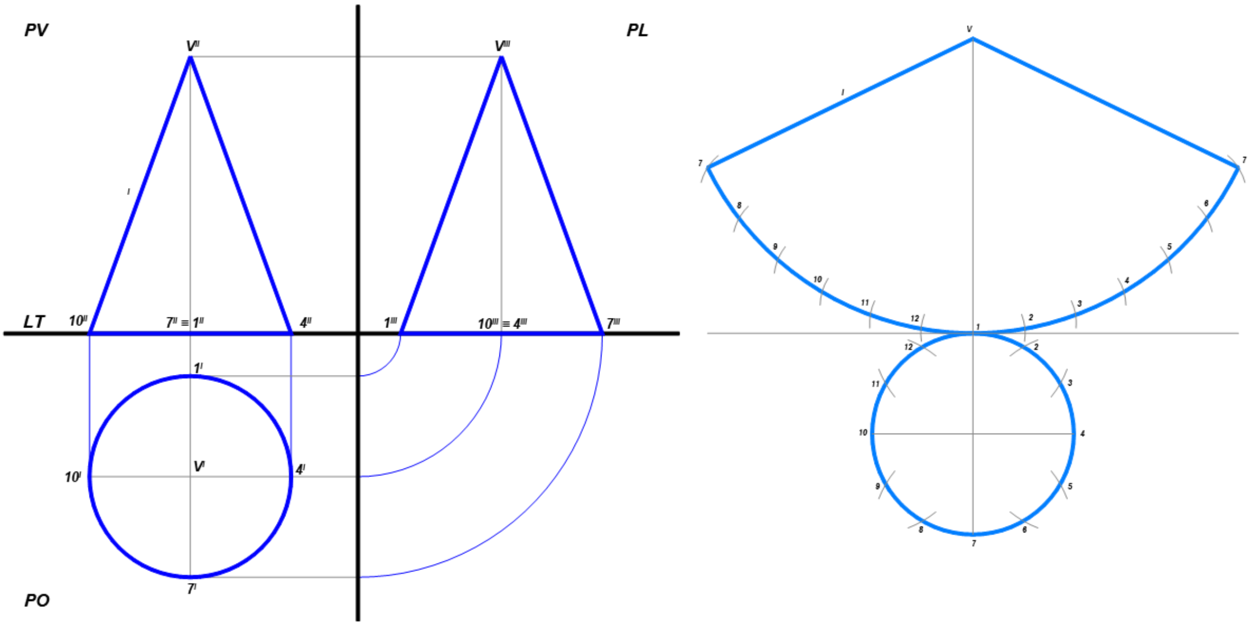
Proiezioni ortogonali | Sviluppo di solidi | Approfondimenti



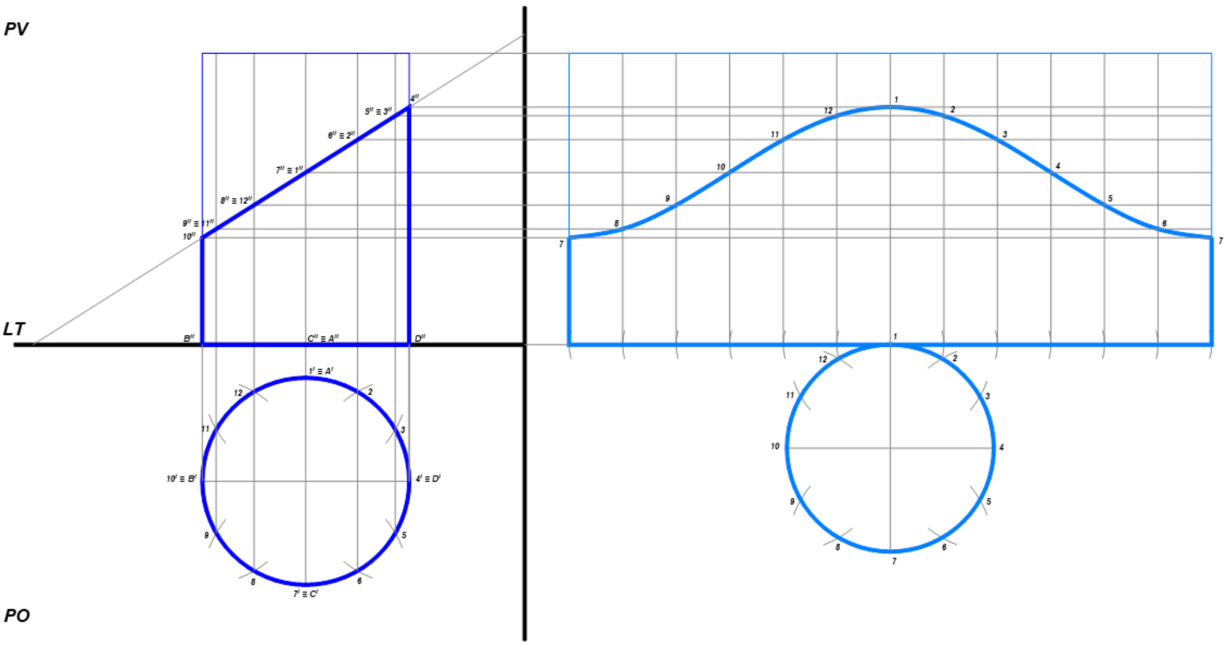
Proiezioni ortogonali e sviluppo di una piramide a base rettangolare



Proiezioni ortogonali e sviluppo di un parallelepipedo sezionato da un piano inclinato



Proiezioni ortogonali e sviluppo di un cono retto



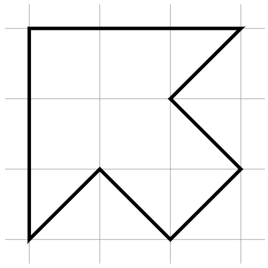
Proiezioni ortogonali e sviluppo di un cilindro retto sezionato da un piano inclinato

Proiezioni ortogonali | Proposte operative

Esercizio 1
Rappresentare in Proiezione ortogonale la figura A ortogonale al PV e inclinata di 60° rispetto al PO.

Esercizio 2
Rappresentare in Proiezione ortogonale la figura A appartenente ad un piano inclinato α le cui tracce $T^{I}\alpha$ sul PO e $T^{II}\alpha$ sul PV formano angoli di 45° rispetto alla linea di terra.

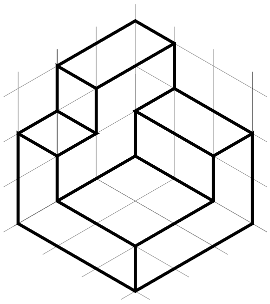
A



Esercizio 3
Rappresentare in proiezione ortogonale il solido B appoggiato al PO in posizione frontale rispetto al PV e al PL.

Esercizio 4
Rappresentare in proiezione ortogonale il solido B con la base quadrata coincidente con un piano inclinato α. Le traccia $T^{I}\alpha$ e $T^{II}\alpha$ formano rispetto alla LT angoli rispettivamente di 45° e 30°.

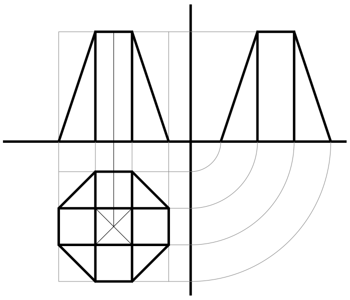
B



Esercizio 5
Sezionare il solido C con un piano secante orizzontale passante per il punto medio dell'asse.

Esercizio 6
Sezionare il solido C con un piano secante α ortogonale al PV e inclinato di 30° rispetto al PO passante per il punto medio dell'asse. Determinare la sezione in vera forma e grandezza ribaltando il piano α sul PV.

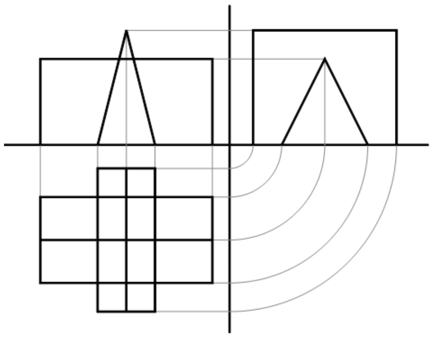
C



Esercizio 7
Determinare, in posizione frontale rispetto a PV e PL, il solido risultante dalla compenetrazione dei due prismi rappresentati nella figura D.

Esercizio 8
Determinare, il solido risultante dalla compenetrazione dei due prismi rappresentati nella figura D, ruotando sul PO una delle due basi di 15° rispetto all'altra.

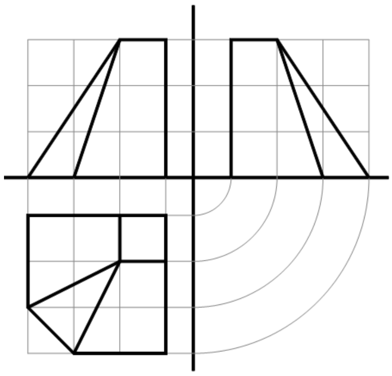
D



Esercizio 9
Rappresentare lo sviluppo del solido della figura C.

Esercizio 10
Rappresentare lo sviluppo del solido della figura E.

E



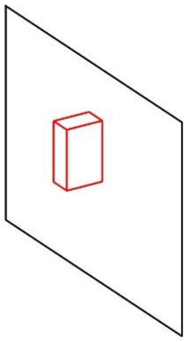
GLOSSARIO


Teoria delle ombre
Poligoni regolari
Sezioni
Strumenti tecnici
Triangoli omologici
Giacitura
Metodi indiretti
Proiezioni successive
Intersezioni
Cavaliera
Compenetrazioni
Cavaliera militare
Sezioni assonometriche
Modanature
Ortogonali al quadro
Prospettiva
Quadro inclinato
Punto di luce
Isometrica
Quadro verticale
Metodo dei piani ausiliari
Norme e convenzioni
Rette
Taglio dei raggi visuali
Sviluppo di solidi
Figure piane
Archi
Rappresentazione grafica
Raggi visuali
Punto di fuga
Quadro frontale
Omologia
Metodi proiettivi
Solidi
Curve
Assonometria
Punti di distanza
Trimetrica
Linguaggio visivo
Punti di misura
Poliedri regolari
Quadro orizzontale
Sovrapposizioni
Cerchio delle distanze

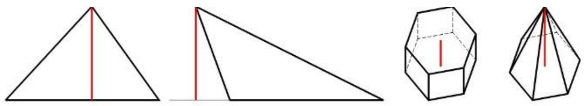
GLOSSARIO PER IMMAGINI
Terminologia essenziale

A

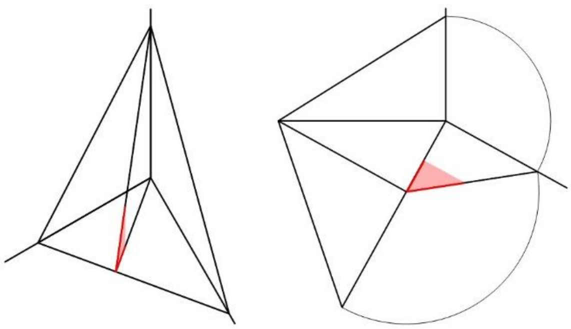
Aggetto
Elemento sporgente rispetto ad un piano verticale. Distanza, misurata ortogonalmente dal piano verticale.



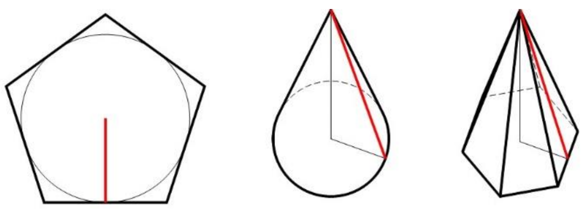
Altezza
In un triangolo è il segmento che unisce un vertice ortogonalmente al lato opposto o alla sua retta d'appartenenza. Le tre altezze del triangolo individuano l'ortocentro. In un prisma l'altezza è la distanza fra le due basi mentre in un solido con una base è la distanza della base dal vertice o dal punto più lontano rispetto al piano d'appartenenza della base.



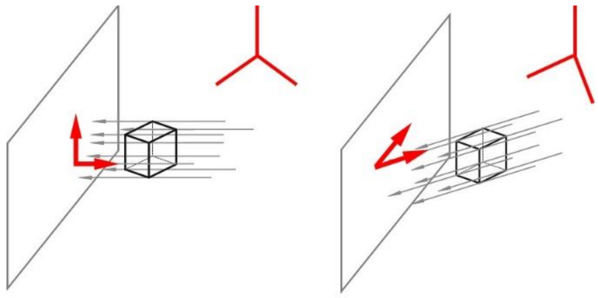
Angolo di massima pendenza
Dati due piani α e β, si considera l'angolo di massima pendenza quello formato dalle rette a e b, intersezioni di ϒ, piano perpendicolare a entrambi i piani dati.



Apotema
In un poligono regolare è uguale al raggio del cerchio inscritto o la perpendicolare al lato con origine nel centro dello stesso poligono. In un cono è il segmento, coincidente con una generatrice, che unisce il vertice con un punto della circonferenza di base. In una piramide è il segmento ortogonale che unisce il vertice con un lato della base.

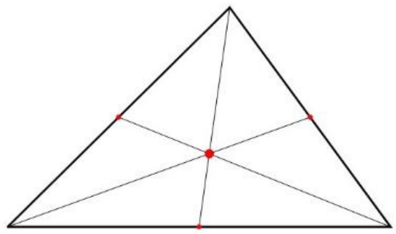


Assonometria
Metodo di rappresentazione grafica con l'osservatore ipotizzato a distanza infinita (Punto improprio di proiezione), raggi proiettanti fra loro paralleli e unità di misura costanti riportate sui tre assi (Da cui il nome) X, Y e Z. La posizione del piano di proiezione, detto quadro assonometrico, ortogonale rispetto ai raggi proiettanti e inclinato rispetto alla triade X, Y e Z determina le assonometrie ortogonali (Isometrica, Dimetrica e Trimetrica). La posizione del quadro assonometrico, inclinata rispetto ai raggi proiettanti determina le assonometrie oblique (Cavaliera, Cavaliera militare, Monometrica).

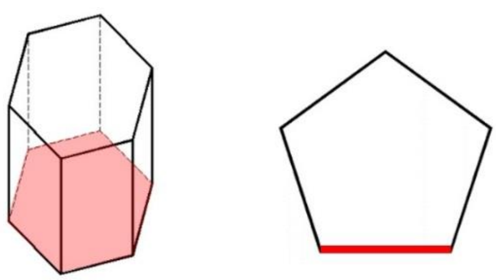


B

Baricentro
In un triangolo è detto baricentro il punto d'intersezione delle sue mediane, ovvero i segmenti che uniscono i vertici con i punti medi dei lati opposti. Il baricentro si trova sempre all'interno del perimetro del triangolo e divide ognuna delle tre mediane in due parti di cui quella contenente il vertice è doppia rispetto a quella contenente il punto medio del lato opposto.

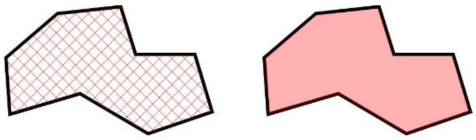


Base
Lato di un poligono, o faccia di un solido. È consuetudine utilizzare il termine per indicare il lato o la faccia orizzontale inferiore, alludendo in questo modo al basamento su cui poggia la figura.

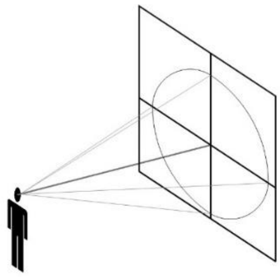


C

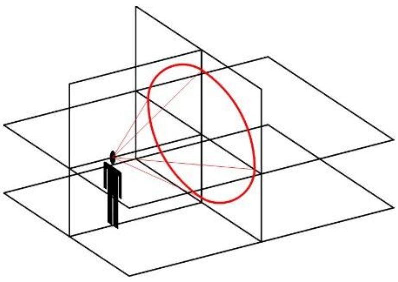
Campire
Colorare o tratteggiare una zona del disegno precedentemente delimitata da un contorno.



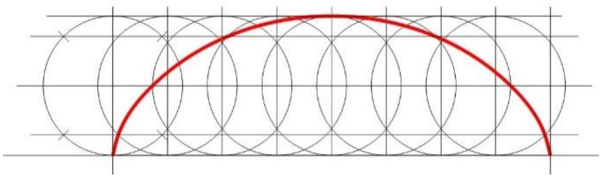
Campo visivo
In riferimento alla fisiologia dell'occhio rappresenta la parte del mondo esterno visibile da un determinato punto di vista. Il campo visivo è detto monoculare se riferito ad un solo occhio o binoculare se dato dalla visione di entrambi gli occhi.



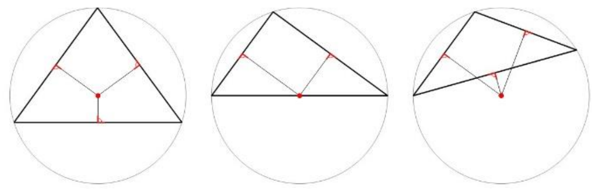
Cerchio delle distanze
Nel sistema prospettico rappresenta sul quadro: la circonferenza di raggio pari alla distanza principale, ovvero la distanza dell'osservatore dal quadro. Il luogo geometrico delle fughe di tutte le rette inclinate di 45° rispetto al quadro.



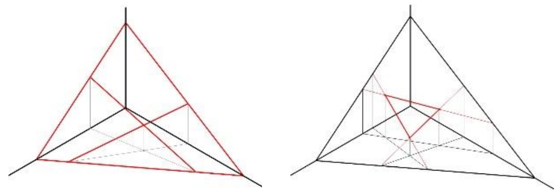
Cicloide
La curva definita da un punto P individuato in un cerchio, che rotola in un piano, senza strisciare, su una retta fissa. Se P appartiene alla circonferenza determina una cicloide ordinaria. Se P giace all'interno del cerchio si determina una cicloide accorciata. Se P si trova all'esterno del cerchio si determina una cicloide allungata.



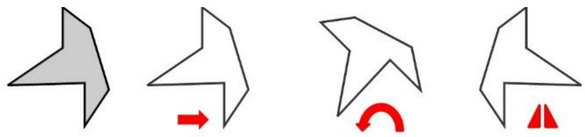
Circocentro
Il circocentro di un triangolo è l'intersezione degli assi dei lati, ovvero della perpendicolare passante per il punto medio. Il circocentro, centro della circonferenza circoscritta, è sempre equidistante dai vertici del triangolo. A seconda del tipo di triangolo il circocentro si trova: 1) all'interno di un triangolo acutangolo 2) nel punto medio dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo 3) all'esterno del perimetro di un triangolo ottusangolo.



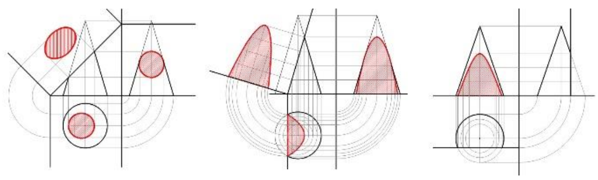
Complanarità
Condizione di appartenenza di punti, rette o figure piane allo stesso piano.



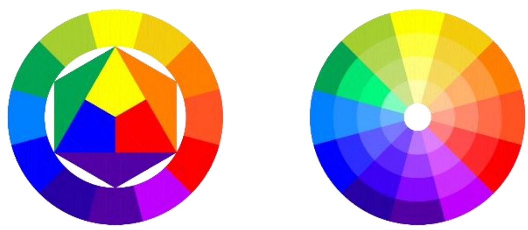
Congruenza
Si definiscono congruenti due entità geometriche aventi la stessa forma e dimensione ottenibili attraverso azioni di traslazione, rotazione e riflessione.



Conica
Curva determinata dalla sezione di un cono circolare retto. A seconda della posizione del piano secante, non passante per il vertice, si ottengono: Ellisse, Parabola, Iperbole oltre alla circonferenza determinata da un piano secante perpendicolare all'asse del cono. Le coniche cosiddette degeneri sono determinate da piani secanti passanti per il vertice del cono che, a seconda della posizione, individuano: un punto, una retta, due rette.

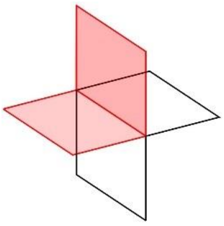


Cromatico
Ciò che è riferito ai colori. Si possono classificare i colori inserendoli in un cerchio diviso in 12 parti (Cerchio cromatico). Partendo dai colori primari (giallo, rosso e blu) non ottenibili per mescolanza, si generano i colori secondari: rosso + giallo = arancione; giallo + blu = verde; blu + rosso = viola. Mischiando ulteriormente primari e secondari si ottengono ulteriori sfumature e gradazioni. I Colori al contrario in posizione opposta nel cerchio cromatico, ovvero: Blu e arancione; Giallo e viola; Rosso e verde, vengono definiti colori complementari caratterizzati dall'esaltazione della rispettiva forza cromatica.

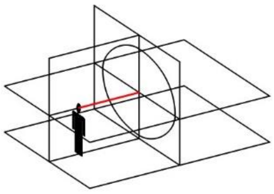


D

Diedro retto
Porzione di spazio delimitata da due semipiani ortogonali fra loro.

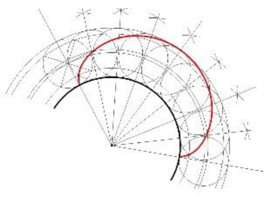


Distanza principale
Nella prospettiva la distanza, presa ortogonalmente, del punto di vista dell'osservatore rispetto al quadro. Coincide con il raggio del cerchio delle distanze.

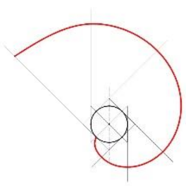


E

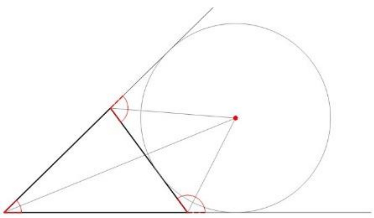
Epicicloide
L'epicicloide è la curva generata da un punto di una circonferenza, detta generatrice, che rotola senza strisciare, sulla parte esterna di un'altra circonferenza, detta deferente.



Evolvente
L'evolvente del cerchio è una curva piana descritta da un punto di una retta, detta generatrice, che ruota senza strisciare lungo una circonferenza, detta deferente.

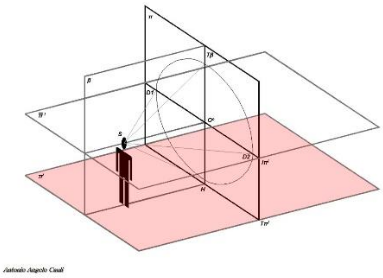


Excentro
In un triangolo il punto d'intersezione fra le bisettrici di due angoli esterni formati da un lato e dal prolungamento degli altri due e la bisettrice interna del terzo angolo non adiacente ai primi due. L'excentro è il centro di una circonferenza tangente a un lato e al prolungamento degli altri due. In ogni triangolo possiamo individuare tre excentri distinti.



G

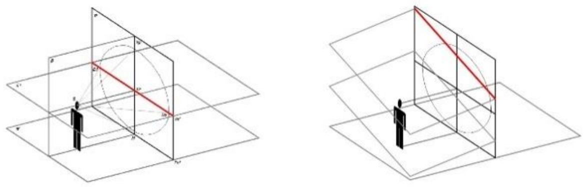
Geometrale
Nella prospettiva è la denominazione del piano orizzontale.



Geometria
Parte della matematica che studia le proprietà delle forme piane, dei solidi e delle relazioni con lo spazio che li contiene.

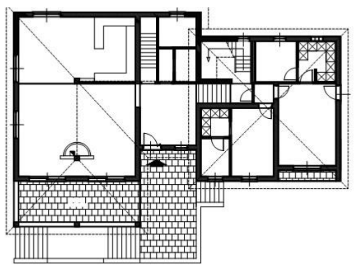
Geometria descrittiva
Insieme di regole e metodi che permettono di rappresentare su una superficie piana, figure tridimensionali comunque posizionate nello spazio.

Giacitura
Nel sistema prospettico l'intersezione col quadro di un piano parallelo ad un piano dato passante per il centro di proiezione.

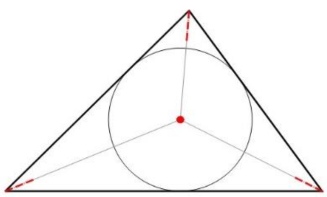


I

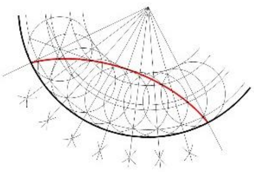
Icnografia
Sezione orizzontale di una architettura eseguita al livello dei vani finestre e porte, e poi proiettata ortogonalmente su un piano di riferimento orizzontale, in genere coincidente piano di calpestato.



Incentro
L'incentro di un triangolo è il punto di intersezione delle bisettrici e centro della circonferenza inscritta ovvero tangente ai lati del triangolo.

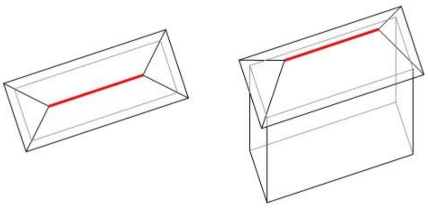


Ipocicloide
L'ipocicloide è la curva generata da un punto di una circonferenza, detta generatrice, che rotola senza strisciare, sulla parte interna di un'altra circonferenza, detta deferente.

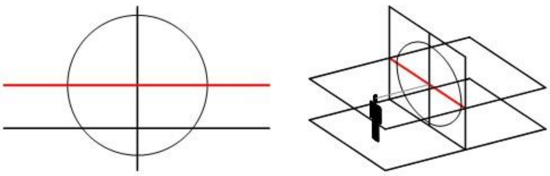


L

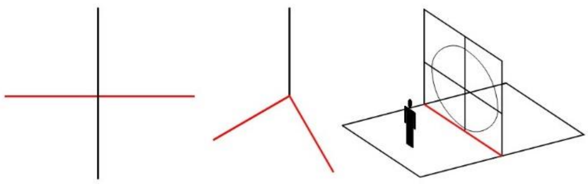
Linea di colmo
Nella struttura geometrica di un tetto la retta, generalmente orizzontale, intersezione di due falde inclinate.



Linea d'orizzonte
La linea d'orizzonte è, nel sistema prospettico, la retta determinata dall'intersezione col quadro, di un piano parallelo al geometrale (orizzontale) passante per l'osservatore. Si può anche definire come luogo geometrico delle fughe di tutte le rette orizzontali, indipendentemente dalla loro inclinazione rispetto al quadro.

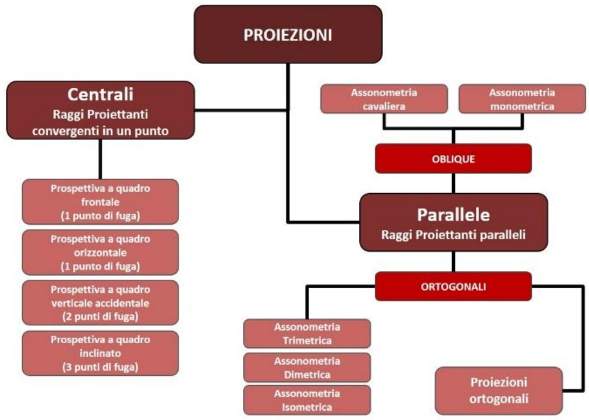


Linea di terra
Nelle proiezioni ortogonali l'intersezione fra il piano Orizzontale e i piani Verticale e Laterale. Nel sistema assonometrico è rappresentata dagli assi X e Y. Nel sistema prospettico è data dall'intersezione del geometrale con il Quadro.



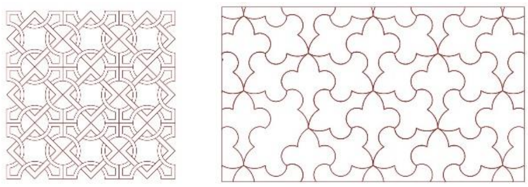
M

Metodi di rappresentazione
I sistemi di rappresentazione grafica si dividono in: 1) Proiezioni centrali, se la distanza dell'osservatore rispetto al quadro è finita ovvero misurabile, e i raggi proiettanti sono convergenti nel punto di vista dell'osservatore (Prospettiva). 2) Proiezioni parallele, se la distanza dell'osservatore rispetto al quadro è infinita ovvero non misurabile, e i raggi proiettanti sono fra loro paralleli (Proiezione ortogonale e Assonometria).

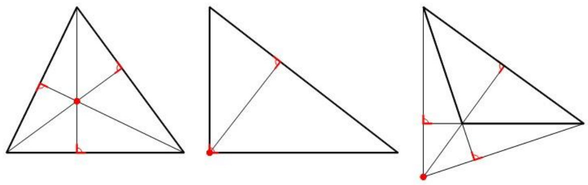


O

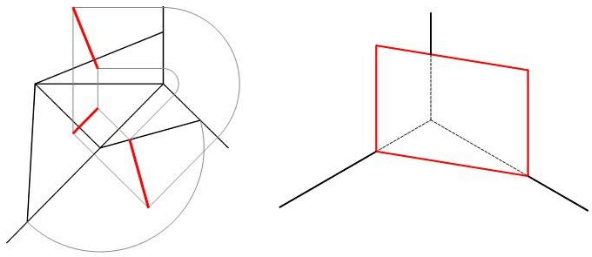
Ornato
Insieme di elementi geometrici o naturalistici con funzione puramente decorativa, caratterizzati dal riferimento alla geometria e dalla possibilità di aggregazione in moduli compositivi, spesso identificativi di epoche e stili.



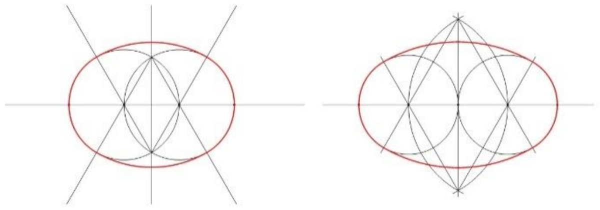
Ortocentro
L'ortocentro di un triangolo è il punto d'incontro delle altezze. In un triangolo acutangolo l'ortocentro è un punto interno, in un triangolo ottusangolo è un punto esterno mentre in un triangolo rettangolo coincide con il vertice dell'angolo retto.



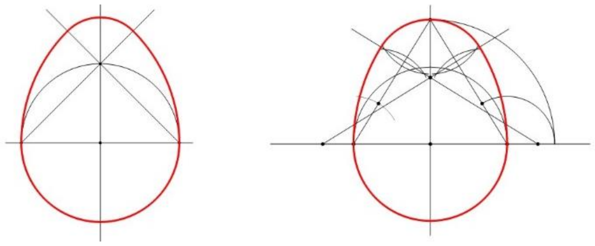
Ortogonalità
Sinonimo di perpendicolarità, è la proprietà che hanno rette e piani, a seconda della reciproca posizione nel piano o nello spazio, di formare angoli retti.



Ovale
Linea curva policentrica, chiusa, e piana che delimita una regione convessa dotata di uno o due assi di simmetria. Ogni suo punto è caratterizzato da tangenti variabili con continuità e può essere incontrata da ogni retta del suo piano d'appartenenza al massimo in due punti. Sono definibili ovali sia la circonferenza che l'ellisse.

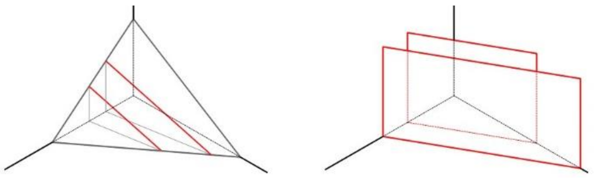


Ovolo
L'ovolo è una curva policentrica chiusa costituita da una semicirconferenza e da altri tre archi raccordati tra loro aventi centri diversi. L'asse minore è rappresentato dal diametro della semicirconferenza mentre l'asse maggiore perpendicolare ad esso coincide con l'asse di simmetria.



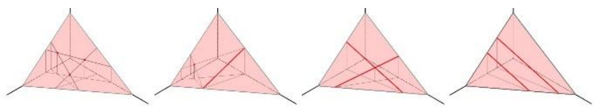
P

Parallelismo
Condizione in cui si trovano due rette i cui punti mantengono la stessa distanza minima uno dall'altro o piani non aventi punti in comune. La relazione di parallelismo si esprime con una doppia barra obliqua //.

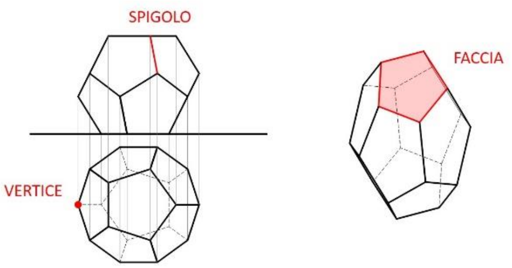


Perpendicolarità
Sinonimo di ***ortogonalità*** (Vedi).

Piano
Ente primitivo della geometria, intuibile ma non definibile formalmente, univocamente individuabile da: 1) tre punti non allineati, 2) da una retta e da un punto non appartenente ad essa, 3) due rette incidenti, ovvero avente un punto in comune, 4) due rette parallele.

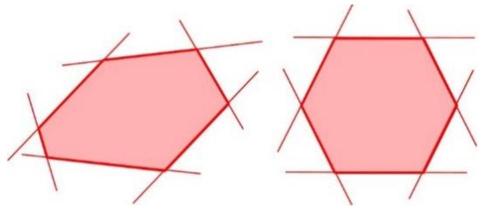


Poliedro
Solido delimitato da superfici poligonali dette facce. I lati che separano le facce del poliedro, si definiscono spigoli mentre gli estremi dei lati si definiscono vertici del poliedro. Un lato separa due facce contigue.

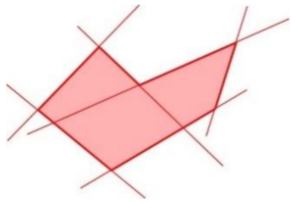


Poligono
Figura geometrica piana delimitata da una spezzata chiusa composta da segmenti definiti lati e punti in comune a due lati contigui definiti vertici.
Il poligono si definisce

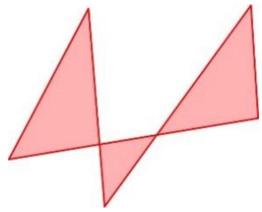
convesso: se i prolungamenti dei lati non attraversano la figura.



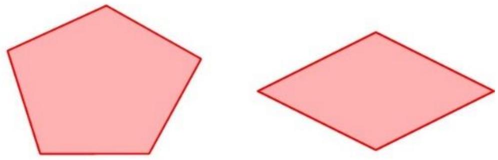
concavo: se i prolungamenti dei lati attraversano la figura.



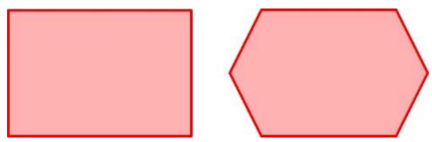
complesso: se composto da una spezzata intrecciata.



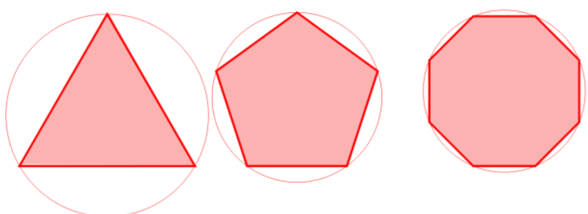
equilatero: se è costituito da lati tutti fra loro congruenti.



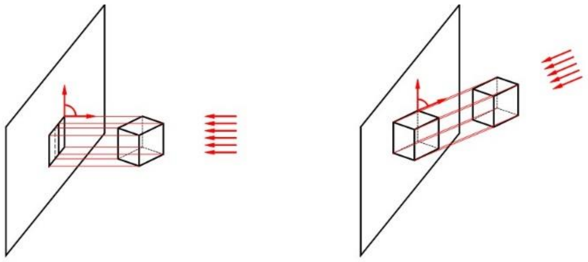
equiangolo: se ha gli angoli interni uguali.



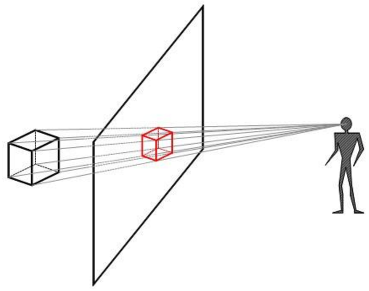
regolare: poligono convesso, equilatero, equiangolo oppure equilatero inscrivibile in una circonferenza.



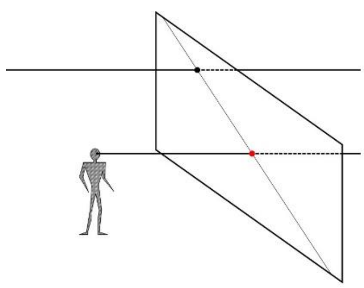
Proiezione parallela
Si definiscono parallele tutte le proiezioni in cui, data la distanza infinita (impropria) dell'osservatore rispetto al quadro, i raggi proiettanti sono tutti fra loro paralleli. Se i raggi proiettanti formano angoli di 90° rispetto al quadro si determinano proiezioni ortogonali o assonometrie ortogonali (isometriche, dimetriche, trimetriche). Nel caso in cui i raggi proiettanti formano angoli diversi da 90° rispetto al quadro, si determinano unicamente assonometrie oblique (monometrica, cavaliera, cavaliera militare)



Prospettiva
La prospettiva è un metodo di rappresentazione grafica in cui si ipotizza l'osservatore posto a distanza finita rispetto al quadro. I raggi proiettanti attraversano l'oggetto e vengono sezionati sul quadro dove determinano l'immagine dell'oggetto che corrisponde alla sua vista prospettica. La rappresentazione prospettica è, nella geometria descrittiva, quella che più si avvicina al meccanismo visivo dell'occhio umano.

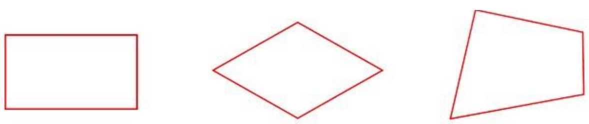


Punto di fuga
Nella prospettiva il punto di fuga di una retta è l'intersezione col quadro di una retta parallela alla retta data passante per S, punto di vista dell'osservatore. Il punto di fuga, che rappresenta l'immagine del punto improprio della retta, è comune a tutto il fascio di rette parallele.

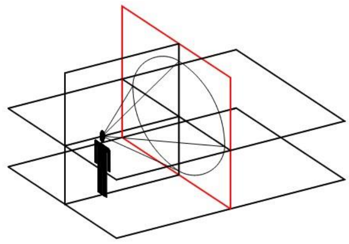


Q

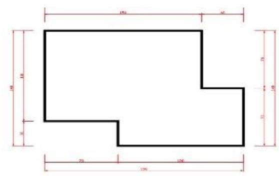
Quadrilatero
Poligono composto da quattro lati, quattro vertici e quattro angoli interni la cui somma è sempre uguale a 360°.



Quadro
È equivalente a piano di proiezione. In particolare nel sistema prospettico rappresenta la parte di piano in cui attraverso le intersezioni dei raggi proiettanti si genera l'immagine.

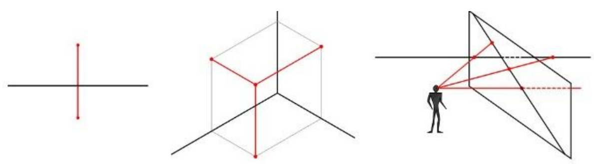


Quotatura
Procedimento per mezzo del quale vengono scritte all'interno del disegno le dimensioni lineari ed angolari di un oggetto da costruire (Progetto) o esistente (Rilievo). I numeri esprimono le dimensioni dell'oggetto rappresentato e vengono detti quote.
La misura degli elementi è definita da linee dette di riferimento mentre il numero viene inserito su un segmento in genere terminante con due frecce detto linea di misura.

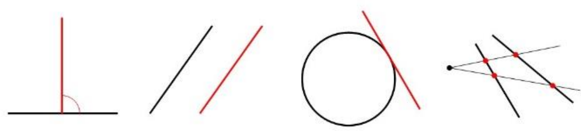


R

Raggio proiettante
Il raggio proiettante è una retta passante per il punto di vista dell'osservatore. Tali rette attraversano l'oggetto nei sui punti notevoli, e determinano, attraverso il meccanismo della proiezione e sezione, il trasferimento dell'immagine sul quadro. Nelle proiezioni ortogonali le direzioni dei raggi, da cui deriva il nome del metodo proiettivo, formano angoli di 90° rispetto ai piani di proiezione. Nell'assonometria, indipendentemente dal metodo adottato, sia esso ortogonale o obliquo, i raggi proiettanti avranno la direzione degli assi X, Y e Z, mentre nella prospettiva convergeranno tutti nel punto di vista.

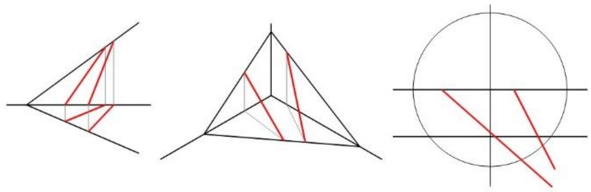


Reciprocità
Relazione che regola le posizioni rispettive di due o più enti geometrici nel piano e nello spazio: distanza, incidenza (tangenza, parallelismo e perpendicolarità), corrispondenza biunivoca.

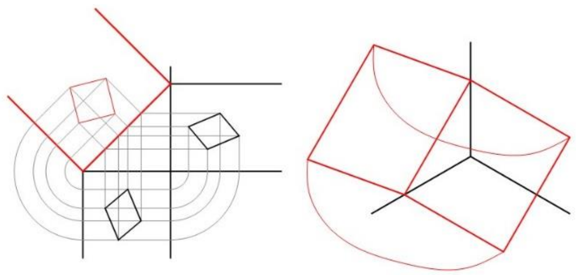


Restituzione prospettica
Metodo di rappresentazione che consente, partendo da una fotografia e dalla conoscenza di almeno una misura e un angolo, di realizzare la prospettiva corrispondente e coerente all'oggetto sia dal punto di vista formale che dimensionale.

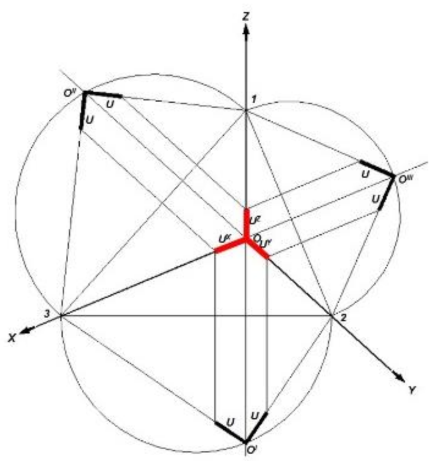
Rette complanari
Rette appartenenti a uno stesso piano. Nelle proiezioni ortogonali e nelle assonometrie due o più rette aventi le tracce sulle rispettive tracce del piano. Nel sistema prospettico due rette complanari sono caratterizzate dalle fughe e dalle tracce appartenenti rispettivamente alla giacitura e alla traccia del piano d'appartenenza.



Ribaltamento
Metodo che consente di riportare da un piano generico non parallelo al piano di proiezione, le immagini in vera forma e grandezza di figure piane, facendolo ruotare rispetto ad un asse ad esso appartenente detto cerniera.

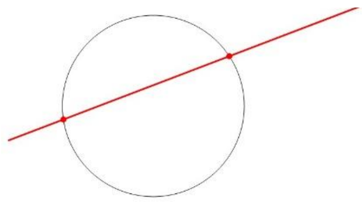


Riduzione assonometrica
Metodo basato sul ribaltamento dei piani di proiezione nelle assonometrie ortogonali, che consente di determinare le unità di misura scorciate nei rispettivi assi X, Y e Z. Il rapporto di riduzione dipende dall'angolo formato dal singolo asse rispetto al piano assonometrico. Nell'assonometria trimetrica il rapporto di riduzione sarà differente in ognuno dei tre assi, mentre nell'assonometria ortogonale isometrica il rapporto di riduzione sarà uguale per i tre assi (0,816).

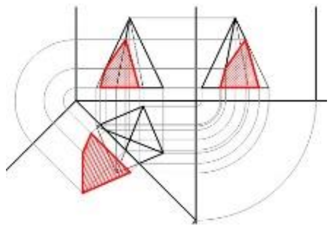


S

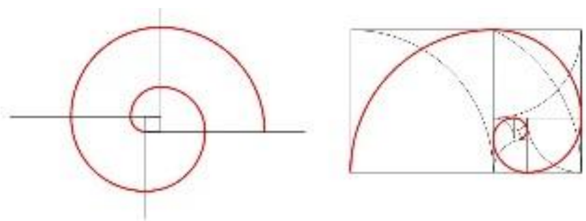
Secante
Retta che attraversa una curva in due punti distinti.



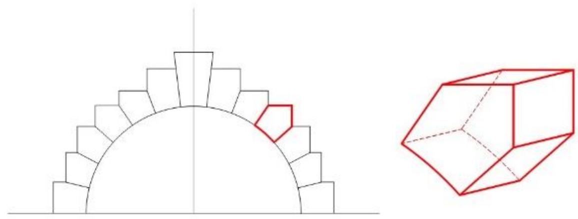
Sezione
Effetto dell'intersezione di un piano detto secante o di sezione, con una figura. Si può definire come luogo geometrico dei punti in comune fra la figura data, sia essa piana o solida, e il piano secante.
Le coniche (v. conica) sono curve piane che si ottengono sezionando un cono retto.



Spirale
La spirale è una curva asimmetrica aperta generata da un punto che si arrotola intorno ad un'origine fissa, detta polo, aumentando o diminuendo in modo continuo la distanza da esso a seconda del verso. Può essere piana o tridimensionale. Fra le varie tipologie citiamo le spirali: Policentrica, Aurea, di Archimede e Logaritmica.



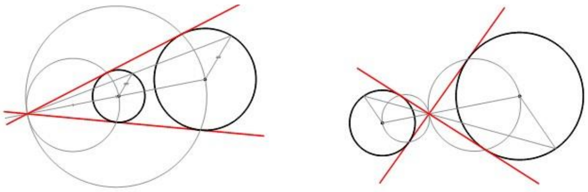
Stereotomia
La stereotomia è la scienza che studia, nell'ambito dell'architettura, la rappresentazione finalizzata alla realizzazione di conci, in pietra, legno o altro materiale da costruzione, e successivamente montati a secco a formare un oggetto composto dalla serie complessiva delle parti. La forma dei conci e dell'elemento composto dipende in generale dalla forma, dalle caratteristiche dei materiali, dalla funzione strutturale, oltre che dalle finalità estetiche ad esso correlate. Pur essendo quindi una scienza finalizzata ad un'attività pratica, la S. è strettamente correlata alla geometria descrittiva di cui applica teorie e metodi di rappresentazione.



T

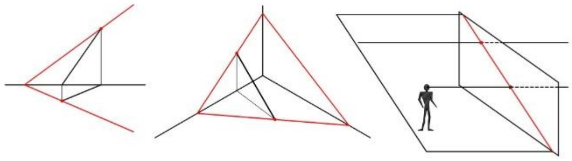
Tangente

Retta passante per un solo punto di una curva data. Più in generale entità grafica avente un unico punto in comune rispetto a una figura.



Traccia

La traccia di una retta o di un piano, è la sua intersezione con il quadro o un qualsiasi altro piano di riferimento. Nel metodo di Monge, ovvero nella doppia proiezione ortogonale, si parla di prima traccia sul piano orizzontale e seconda traccia sul piano verticale. Se una retta appartiene ad un piano le tracce della retta appartengono alle rispettive tracce del piano.



Triangolo delle tracce

Triangolo appartenente al piano di proiezione i cui vertici coincidono con le tracce degli assi del sistema individuato come riferimento. Nell'assonometria ortogonale, e per analogia nella prospettiva a quadro inclinato, coincide con il triangolo i cui vertici sono dati dall'intersezione col quadro delle direzioni X, Y e Z.