

Antonio Cauli

DISEGNO

Teoria e Rappresentazione

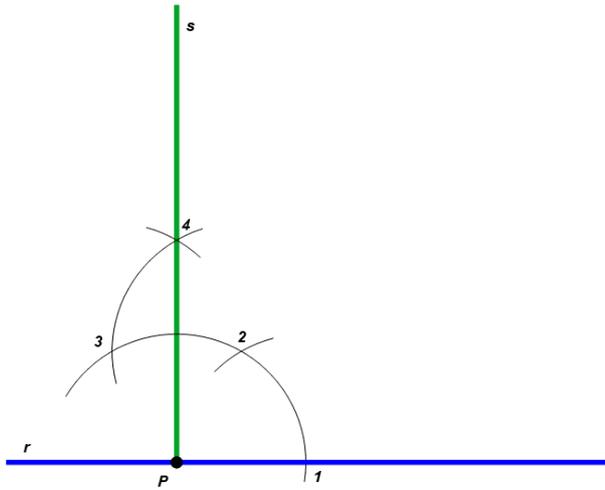
SECONDA EDIZIONE

Volume 1

Costruzioni geometriche

Proiezioni ortogonali

(Primo biennio)



Perpendicolare passante per un punto P appartenente ad una retta

Tracciare una retta r e un punto P appartenente ad essa.

Con apertura di compasso a piacere puntare in P e tracciare un arco e determinare 1 sulla retta r .

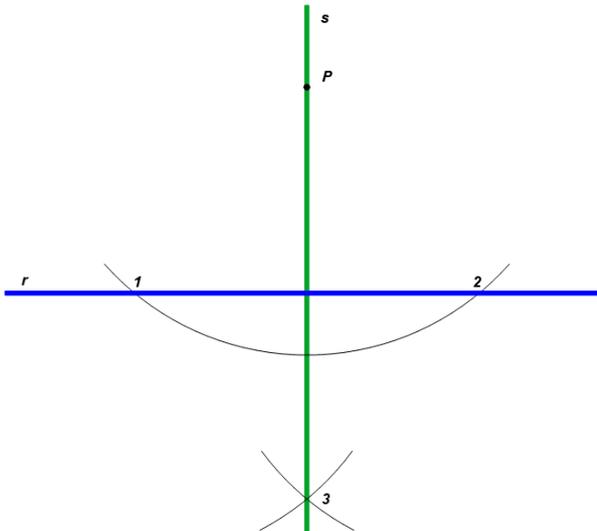
Con la stessa apertura di compasso:

puntare su 1 e determinare 2.

puntare su 2 e determinare 3.

puntare su 3 e determinare 4.

Tracciare la retta s perpendicolare a r passante per P e per 4.



Perpendicolare passante per un punto esterno

Tracciare una retta r e un punto P esterno ad essa.

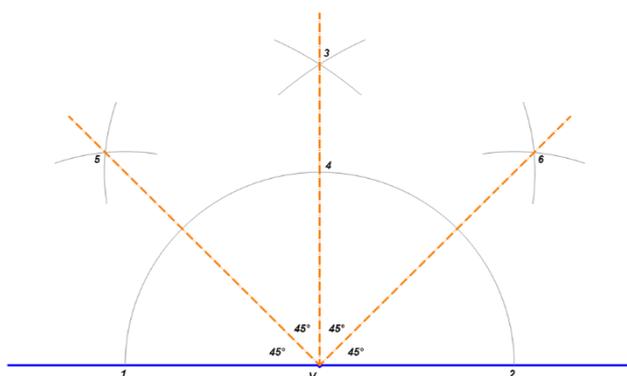
Con apertura di compasso generica puntare in P e tracciare un arco che intercetta la retta r nei punti 1 e 2.

Puntare il compasso prima in 1 e poi in 2 e tracciare due archi che si intersecano nel punto 3.

Tracciare la retta s passante per P e per 3 ortogonale alla retta r .

L'insieme di infiniti punti allineati è definito retta, caratterizzata da assenza di spessore, lunghezza infinita e direzione nello spazio. Le rette si indicano con lettere minuscole. Due rette che intersecandosi formano quattro angoli uguali (retti) si definiscono perpendicolari, oppure oblique se formano angoli differenti.

Costruzioni geometriche | Rette | Divisione di angoli

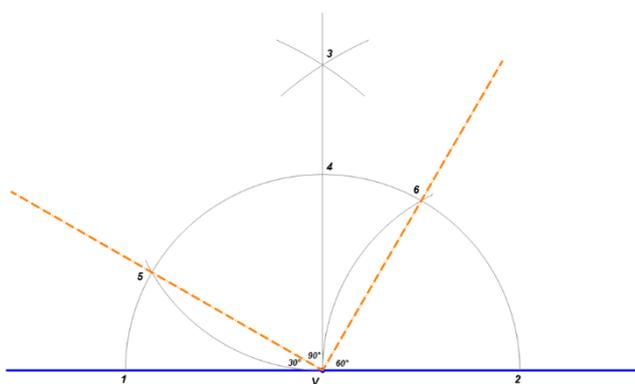


Divisione dell'angolo piatto in quattro parti uguali

Impostare un angolo piatto di vertice V. Puntare nel punto V, tracciare una semicirconferenza e individuare i punti 1 e 2. Tracciare puntando in 1 e successivamente in 2, due archi che si intersecano nel punto 3.

Tracciare la retta passante per V-3 e determinare il punto 4 sulla semicirconferenza. Tracciare puntando in 1 e successivamente in 4, due archi che si intersecano nel punto 5. Tracciare la retta passante per V-5. Tracciare puntando in 4 e successivamente in 2, due archi che si intersecano nel punto 6. Tracciare la retta passante per V-6.

Le rette V-5, V-3 e V-6 dividono l'angolo piatto in quattro parti uguali.



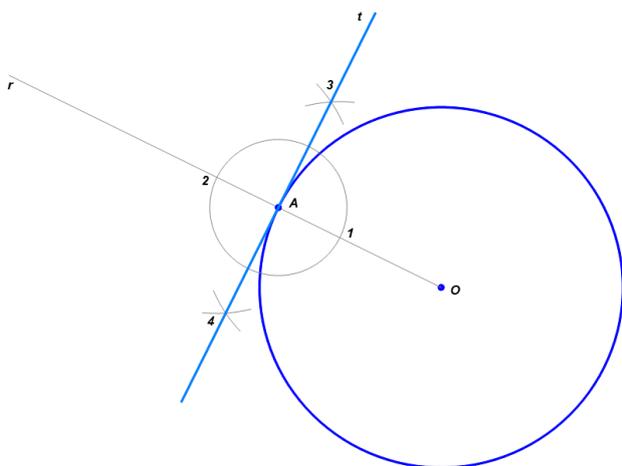
Divisione di un angolo piatto in tre angoli consecutivi: 30° - 90° - 60° .

Impostare un angolo piatto di vertice V. Puntare nel punto V, tracciare una semicirconferenza e individuare i punti 1 e 2. Tracciare puntando in 1 e successivamente in 2, due archi che si intersecano nel punto 3.

Tracciare la retta passante per V3 e individuare il punto 4 nell'intersezione con l'arco. Puntare nel punto 4 e tracciare con apertura 4V l'arco che intercetta il precedente di centro V nel punto 5. Allo stesso modo puntare nel punto 2, tracciare l'arco con apertura 2V e determinare il punto 6. La retta passante per V5 forma un angolo di 30° rispetto all'orizzontale 1V. La retta passante per V6 forma un angolo di 90° rispetto alla retta V5 e di 60° rispetto alla direzione orizzontale V2.

L'angolo è la porzione di piano individuato da due semirette aventi origine in un punto detto vertice. Si intende per angolo concavo la regione di piano contenente il prolungamento dei lati, mentre l'altra definisce l'angolo convesso.

Costruzioni geometriche | Rette | Tangenti

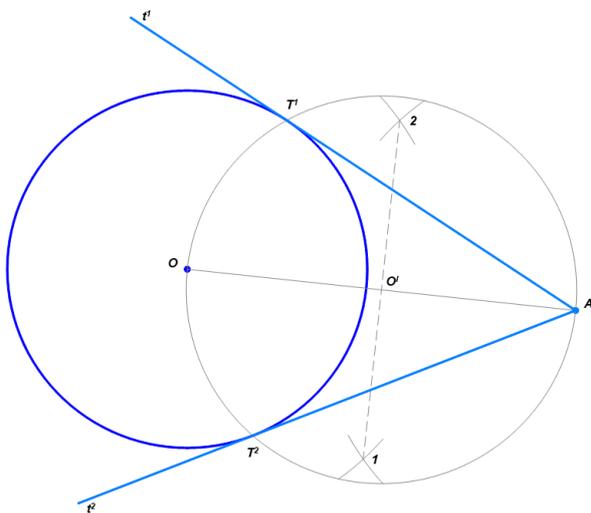


Tangente alla circonferenza passante per un suo punto

Tracciare la circonferenza di centro O e raggio OA. Tracciare la semiretta r con origine in O passante per A.

Tracciare una circonferenza di centro A e raggio a piacere e individuare i punti 1 e 2 sulla retta r. Puntare su 1 e 2, tracciare gli archi che determinano le intersezioni 3 e 4.

La retta passante per 3 e 4 è la tangente alla circonferenza passante per il punto A.



Tangente alla circonferenza passante per un punto esterno

Data la circonferenza di centro O e un punto A esterno ad essa tracciare il segmento OA.

Puntare il compasso su O e su A con apertura a piacere, tracciare gli archi e determinare le intersezioni 1 e 2. Tracciare 1-2 asse del segmento OA e determinare O'. La circonferenza di diametro OA e centro O' interseca la circonferenza di centro O nei punti T¹ e T².

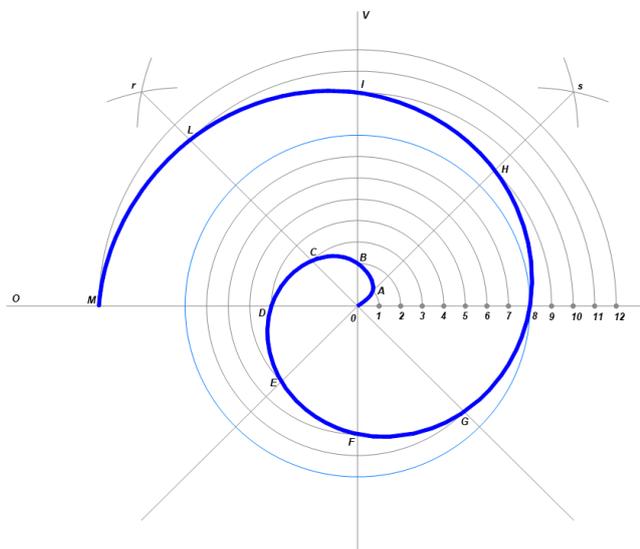
Tracciare le semirette, con origine in A e passanti per i punti T¹ e T², tangenti alla circonferenza di centro O.

La tangente è una retta che, come richiama l'etimologia del termine, tocca in un solo punto un arco, una generica curva o una circonferenza.

Costruzioni geometriche | Curve policentriche



Spirale Di Archimede



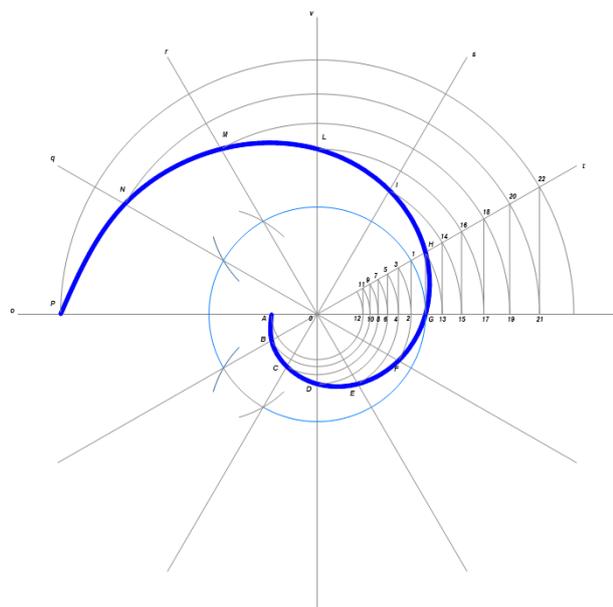
Tracciare gli assi orizzontale (O), verticale (V) e determinare nell'intersezione il punto O.

Tracciare una circonferenza di raggio 0-8 sull'asse O. Dividere il raggio 0-8 in 8 parti uguali estendendo l'individuazione dei punti alla stessa distanza fino a 12 lungo l'asse O. Dividere la circonferenza in 8 parti tracciando gli assi inclinati di 45° r-O ed s-O.

Puntare nel centro O e tracciare gli archi di raggio 0-1 – 0-12 e determinare le intersezioni A ... M sugli assi s, V, r, O. Tracciare la spirale di Archimede, raccordando adeguatamente i punti 0-A-B-C-D-E-F-G-8-H-I-L-M col curvilineo.



Spirale logaritmica



Tracciare gli assi orizzontale (o), verticale (v) e determinare nell'intersezione il punto O.

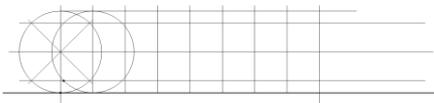
Fissato sull'asse "o" il punto G, tracciare la circonferenza di raggio 0-G. Puntando nelle intersezioni fra la circonferenza e gli assi ortogonali "o" e "v" dividere la circonferenza in 12 parti uguali e tracciare nei punti così determinati gli assi orientati a 30° (t), 60° (s), 120° (r) e 150° (q) rispetto all'orizzontale o. Dal punto 1, intersezione di t con la circonferenza tracciare la perpendicolare e individuare il punto 2 su o. Puntando su 0 tracciare l'arco di raggio 0-2, individuare il punto 3 su t, e il punto F su q. Proseguire con la stessa modalità fino alla determinazione del punto 12 su o.

Dal punto G, tracciare la perpendicolare all'asse o, e individuare il punto H su t. Puntando su 0 tracciare l'arco di raggio 0-H, e individuare il punto 13 su o. Dal punto 13, tracciare la perpendicolare all'asse o, e individuare il punto 14 su t. Puntando su 0 tracciare l'arco di raggio 0-14, individuare il punto 15 su o, e il punto I su s. Proseguire con la stessa modalità fino alla determinazione del punto 21 su o.

Dal punto 21, tracciare la perpendicolare all'asse o, e individuare il punto 22 su t. Puntando su 0 tracciare l'arco di raggio 0-22, individuare il punto P su o.

Unire, raccordando con il curvilinee, i punti: A-B-C-D-E-F-G-H-I-L-M-N-P.

Le spirali sono curve policentriche aperte formate da archi di circonferenza di raggi crescenti raccordati. Alcuni tipi di spirali come quella di Archimede, o la logaritmica sono costruzioni geometriche realizzabili solo attraverso la determinazione di punti debitamente raccordati attraverso l'uso di adeguati curvilinei.

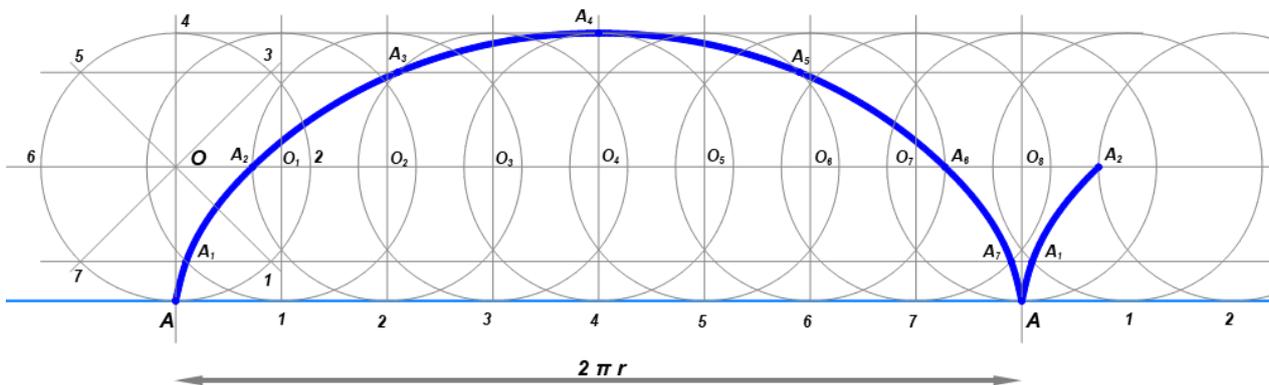


Cicloide ordinaria

Tracciare a piacere la retta deferente. Tracciare la perpendicolare per il punto A sulla la retta deferente
Tracciare la parallela alla deferente passante per O sulla perpendicolare. Tracciare la circonferenza di raggio OA e dividerla in 8 parti uguali nei punti: A-1-2-3-4-5-6-7.

Tracciare i raggi paralleli alla deferente passanti per i punti in cui è divisa la circonferenza: 4 - 5-3 - 6-2 - 7-1. Riportare sulla deferente la distanza AA pari alla misura della circonferenza: $2 \pi r$.

Rappresentare la circonferenza nei punti di contatto con la deferente e determinare sulle corrispondenti quote i punti: $A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6 - A_7$. La circonferenza nel punto A chiude la cicloide.



Evolventi e cicloidi, inseriscono nell'ambito delle costruzioni geometriche il concetto di rappresentazione dello spostamento di punti rispetto a enti geometrici definiti (punti, rette, circonferenze).

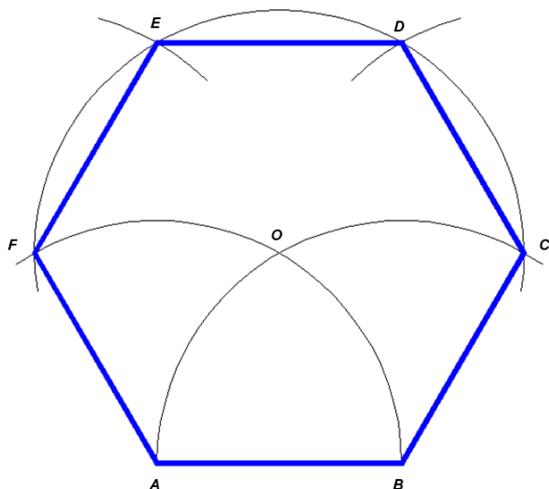
L'evolvente del cerchio è una curva piana descritta da un punto di una retta, detta generatrice, che ruota senza strisciare lungo una circonferenza, detta deferente.

La cicloide ordinaria è la curva definita da un punto P individuato in un cerchio, che rotola in un piano, senza strisciare, su una retta fissa.

L'epicicloide è la curva generata da un punto di una circonferenza, detta generatrice, che rotola senza strisciare, sulla parte esterna di un'altra circonferenza, detta deferente.

L'ipocicloide è la curva generata da un punto di una circonferenza, detta generatrice, che rotola senza strisciare, sulla parte interna di un'altra circonferenza, detta deferente.

Costruzioni geometriche | Poligoni regolari dato il lato

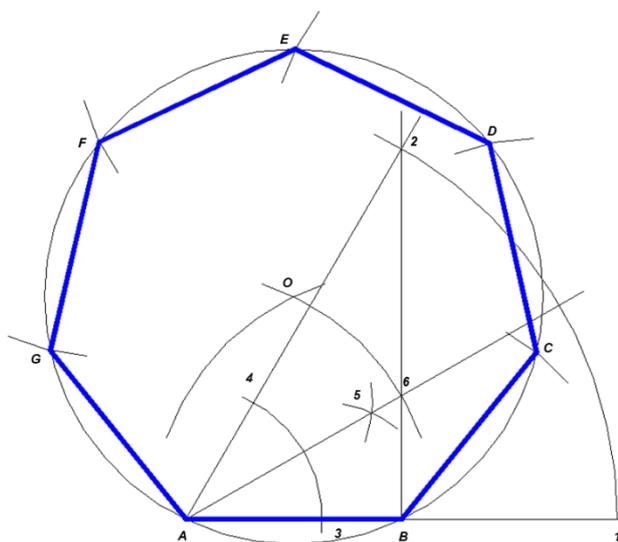


Esagono

Tracciare il lato AB. Centrare negli estremi A e B, e con apertura AB tracciare due archi che si intersecano nel punto O.

Puntare in O e con apertura OA, pari al lato AB, tracciare un arco che interseca gli archi disegnati in precedenza, nei punti F e C. Puntare con la stessa apertura in F e C e determinare D ed E.

Unire i punti A B C D E ed F.

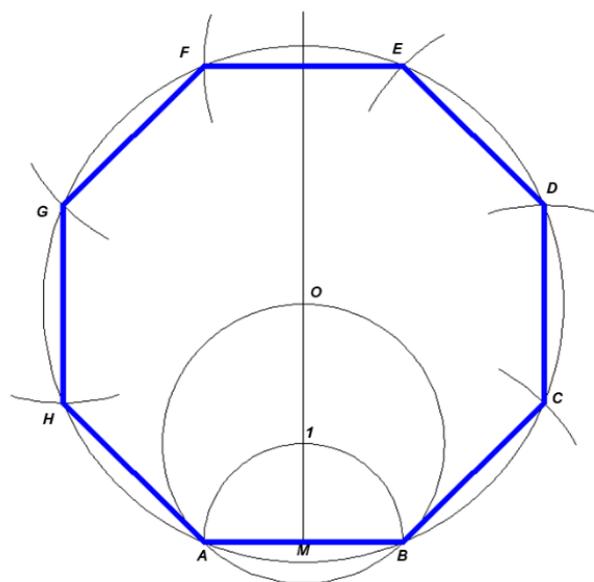


Ettagono

Tracciare il lato AB e sulla stessa retta B1 di uguale lunghezza. Determinare 2 come intersezione fra la perpendicolare per B e l'arco di apertura A1 ottenuto puntando in A.

Dopo aver tracciato A2 costruisci la bisettrice dell'angolo 1A2, che interseca in 6 la perpendicolare innalzata per B. Con apertura A6 centra in A e B e determina O.

Con apertura OA centrare in O tracciare il cerchio che circoscrive l'ettagono. Riportare di seguito sulla circonferenza i punti alla distanza AB. Unire i punti A B C D E F e G.

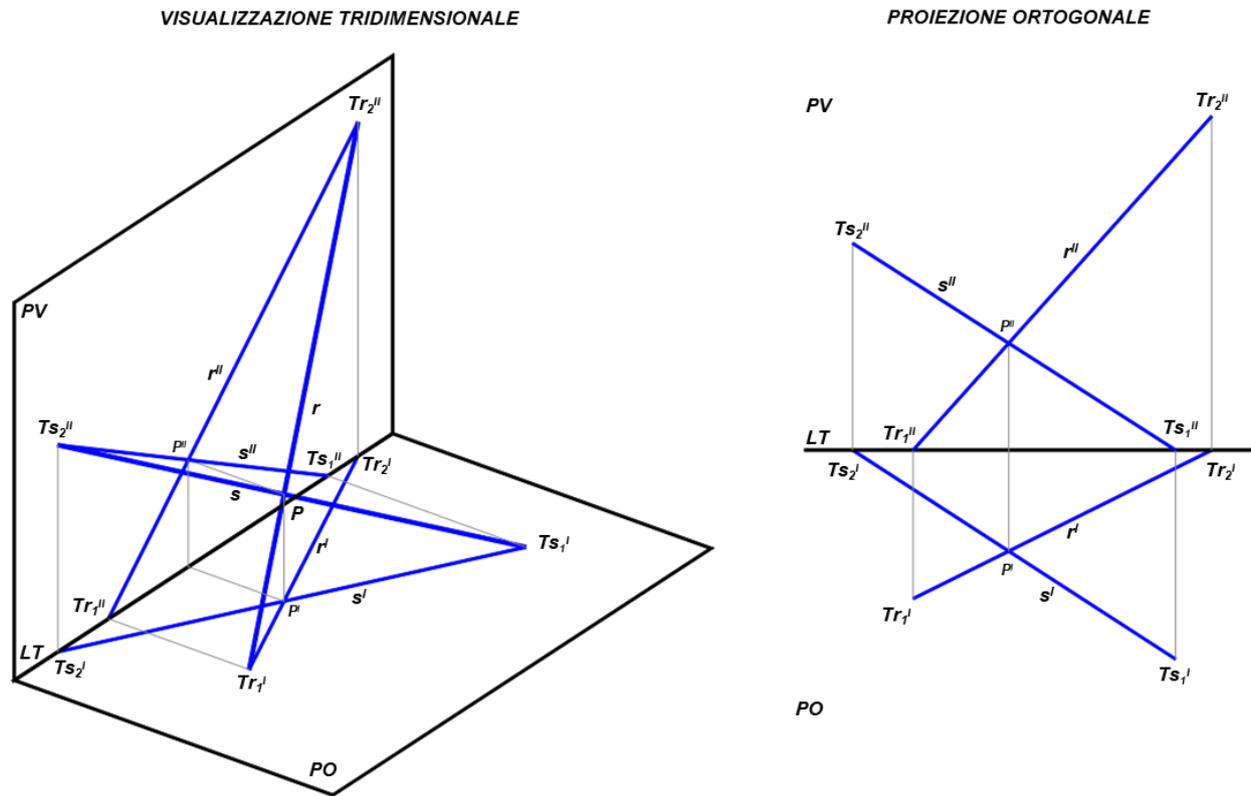


Ottagono

Tracciare il lato AB e la perpendicolare passante per il punto medio M.

Puntando su M tracciare la semicirconferenza di diametro AB che intercetta la perpendicolare nel punto 1. Puntare su 1 con apertura 1A e tracciare il cerchio che intercetta la perpendicolare nel punto O. Con apertura OA centrare in O e tracciare il cerchio che circoscrive l'ottagono.

Riportare di seguito sulla circonferenza i punti alla distanza AB. Unire i punti A B C D E F G e H.



Proiezione ortogonale di due rette incidenti

Proiezione della retta s

La prima proiezione della retta generica s si determina unendo la traccia sul piano orizzontale Ts_1^1 con la proiezione ortogonale della traccia sul piano verticale (Ts_2^1) sul piano orizzontale, Ts_2^1 . La proiezione Ts_2^1 si trova sulla linea di terra e il segmento $Ts_2^1 - Ts_1^1$ rappresenta s^1 prima proiezione della retta generica r. Analogamente si procede sul piano verticale per la determinazione della seconda proiezione unendo la traccia sul piano verticale Ts_2^1 con la proiezione ortogonale della traccia sul piano orizzontale (Ts_1^1) sul piano verticale, Ts_1^1 . La proiezione Ts_1^1 si trova sulla linea di terra e il segmento $Ts_2^1 - Ts_1^1$ rappresenta s^2 seconda proiezione della retta generica s.

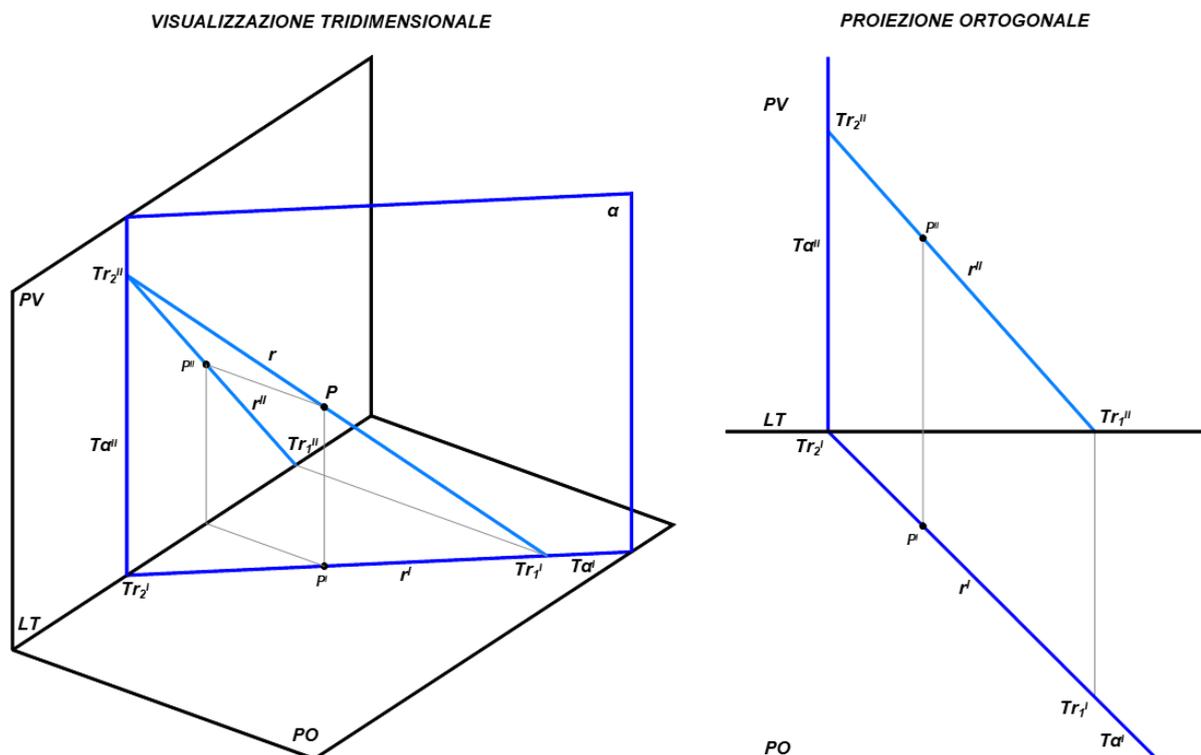
Proiezione della retta r

Individuato su s^1 il punto P^1 per tracciare la retta r passante per P, si procede fissando a piacere una delle due tracce di r, ad esempio Tr_1^1 e successivamente tracciando la retta passante per Tr_1^1 e P^1 fino ad intercettare la linea di terra nel punto Tr_2^1 , prima proiezione della traccia di r sul piano verticale. Il segmento $Tr_1^1 - Tr_2^1$ passante per P^1 rappresenta la prima proiezione della retta r incidente nel punto P con la retta s. A seguire si proietta sul piano verticale la traccia Tr_1^1 e il raggio proiettante verticale passante per Tr_2^1 . Per imporre la condizione d'appartenenza di P con la retta r si traccia la retta passante per Tr_1^1 e per P^2 fino ad intercettare il raggio verticale passante per Tr_2^1 nel punto Tr_2^2 traccia della retta r sul piano verticale. Il segmento $Tr_1^1 - Tr_2^2$ passante per P^2 rappresenta la seconda proiezione della retta r incidente nel punto P con la retta s.

Il punto d'intersezione P

Le proiezioni di P, intersezione delle rette r ed s, coincidono con le intersezioni delle corrispondenti proiezioni delle rette. Poiché un punto appartiene ad una retta se le sue proiezioni appartengono alle rispettive proiezioni della retta, le proiezioni del punto P, dovranno necessariamente appartenere sia alla proiezione di r che a quella di s: $P^1 \in r^1$ e $P^1 \in s^1$ così come $P^2 \in r^2$ e $P^2 \in s^2$.

Proiezioni ortogonali | Piani



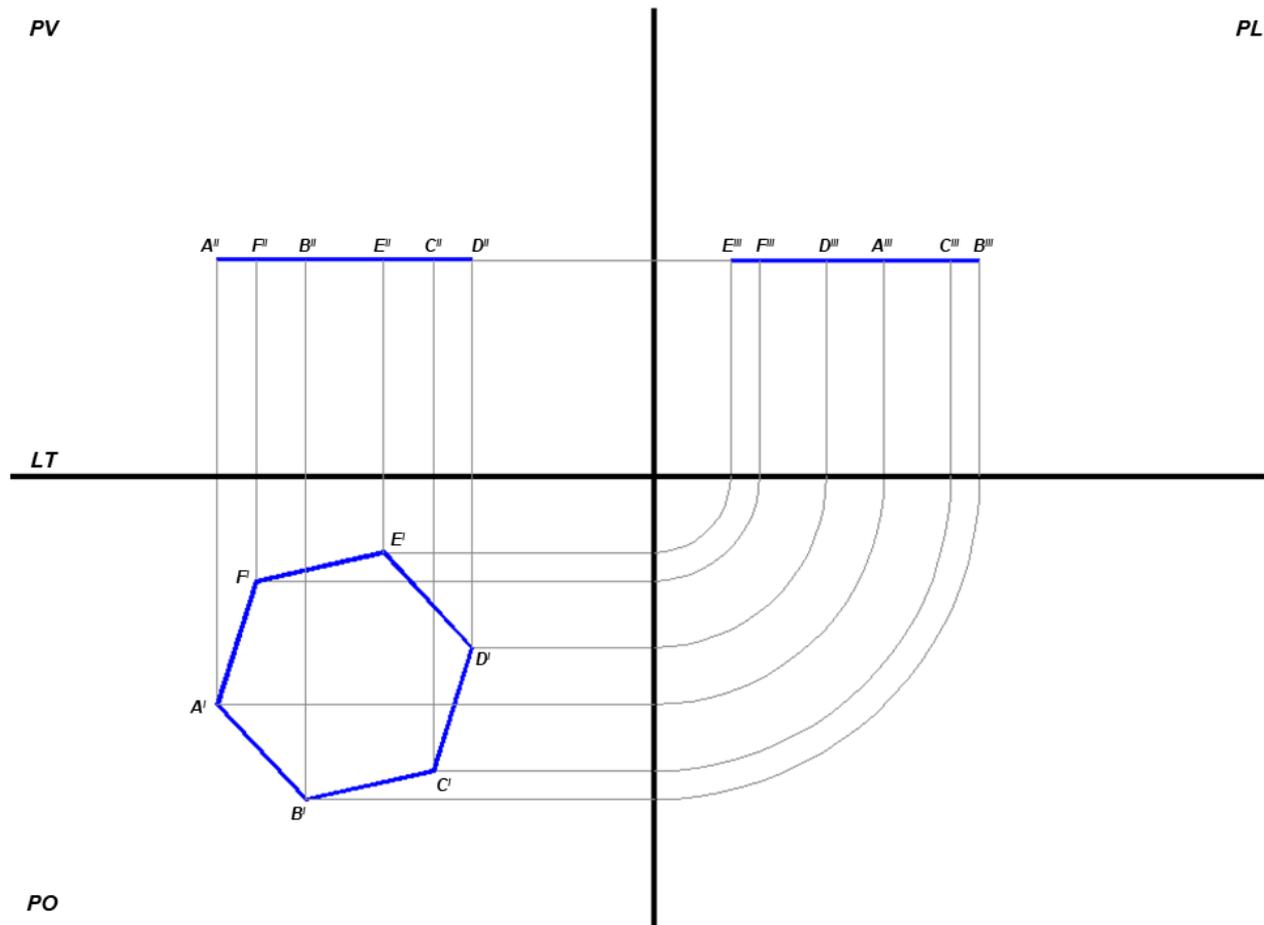
Piano proiettante α ortogonale al piano orizzontale e inclinato al piano verticale. Condizioni d'appartenenza di un punto P di una retta r appartenente al piano α .

La rappresentazione del piano α ortogonale al piano orizzontale e inclinato rispetto al piano verticale presenta alcuni aspetti significativi. In particolare rileveremo la condizione di ortogonalità rispetto al piano orizzontale sul piano verticale, dove la seconda traccia del piano α formerà un angolo di 90° rispetto alla linea di terra. In modo analogo l'inclinazione rispetto al piano verticale sarà "leggibile" sul piano orizzontale dove l'angolo formato dalla prima traccia del piano α rispetto alla linea di terra si presenterà in ampiezza oggettiva.

Se adesso ipotizziamo una retta r appartenente a α , fatta eccezione alcune posizioni particolari, ovvero di parallelismo rispetto ad uno dei due piani principali, tale retta ha le tracce sulle rispettive tracce del piano. Inoltre la prima proiezione della retta coinciderà con la prima traccia del piano α .

Le proiezioni del punto P appartenente al piano α coincideranno con le rispettive proiezioni della retta r , a sua volta appartenente al piano α .

Proiezioni ortogonali | Figure piane



Proiezione ortogonale di un esagono regolare parallelo al piano orizzontale

1 – Impostazione dei piani di proiezione

Tracciare la LT.

Impostare la traccia del piano laterale determinando PO, PV e PL.

2 – Proiezione sul Piano Orizzontale

Rappresentare, parallelamente al PO, in posizione generica rispetto a PV e PL, l'esagono regolare ABCDEF.

3 – Proiezione sul Piano Verticale

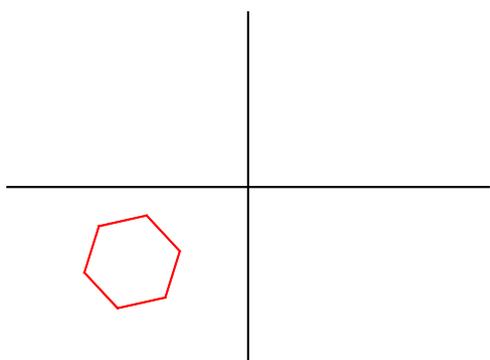
Tracciare il raggio proiettante orizzontale alla distanza H dalla LT.

Proiettare sul PV i punti dell'esagono: A – D – F – B – E – C.

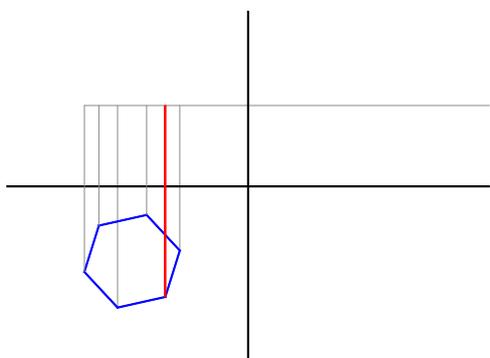
Ripassare con segno di linea a vista la proiezione sul PV.

4 – Proiezione sul Piano Laterale

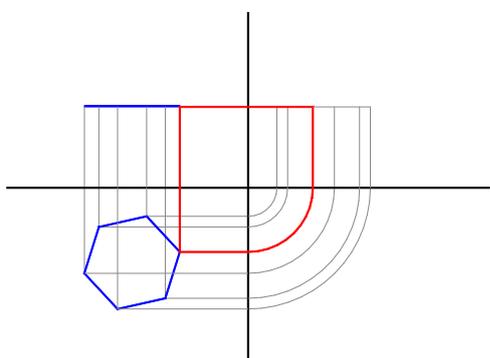
Proiettare sul PL i punti dell'esagono in prima proiezione: E – B – F – D – A – C. Ripassare con segno di linea a vista la proiezione sul PL.



Tracciare l'esagono sul PO nella forma e misure reali poiché parallelo al piano di proiezione e ruotato di un angolo generico in modo tale da non far coincidere fra loro alcun punto nella proiezione sui piani verticale e laterale. L'esagono in condizione di parallelismo rispetto al piano orizzontale sarà rappresentato in vera forma, mantenendo inalterate le misure lineari e angolari.



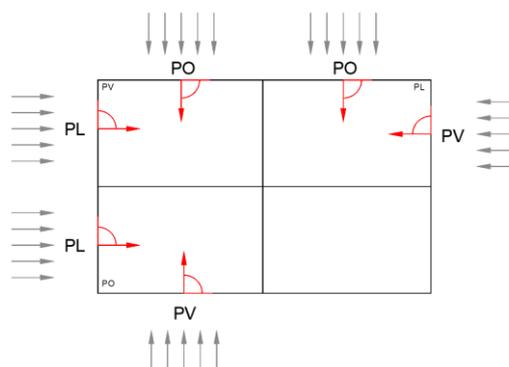
Una volta determinata, qualora fosse specificato nel testo della consegna, la distanza dell'esagono dal PO, tracciare sul piano verticale una retta orizzontale a tale distanza dalla linea di terra e proiettare i sei punti dell'esagono sul piano verticale ortogonalmente alla linea di terra. Le intersezioni con la retta determinano la seconda proiezione dell'esagono regolare sul piano verticale.

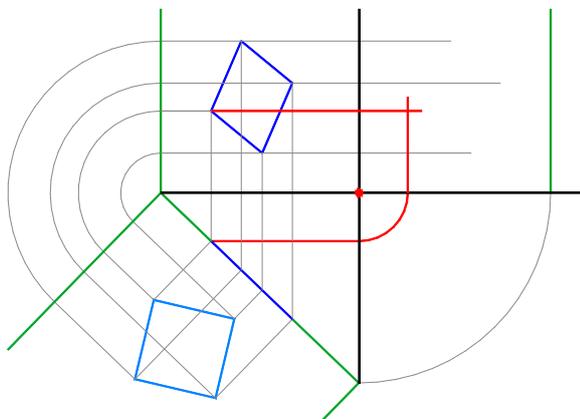
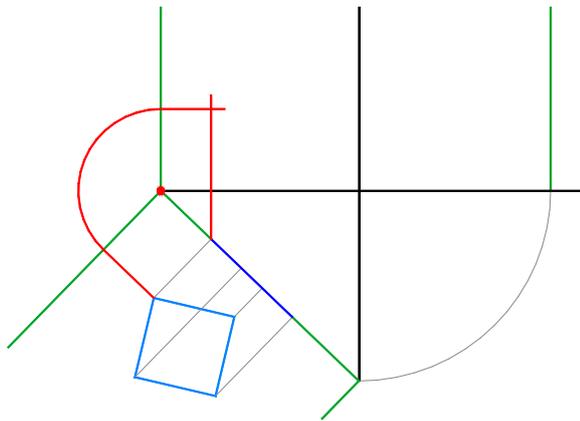
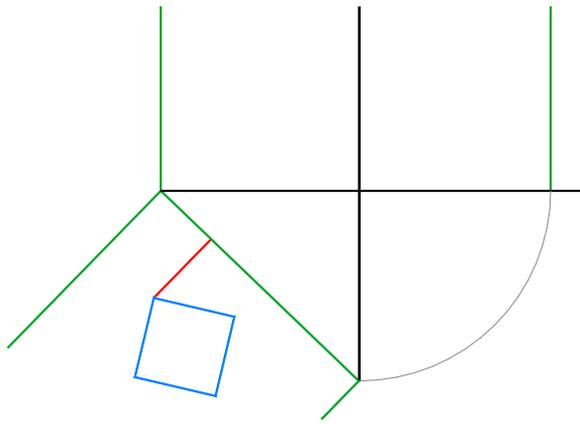


La proiezione sul PL sarà data dall'intersezione dei raggi proiettati ortogonalmente dal piano orizzontale sull'asse, traccia del piano laterale, e riportati con il compasso puntato nell'origine dei piani di proiezione. Nell'intersezione degli archi di rotazione con la linea di terra tracciare i raggi ortogonali verticali fino ad intercettare la retta orizzontale sul piano laterale. Anche la proiezione sul piano laterale, così come quella sul PV, manterrà la medesima distanza e condizione di parallelismo rispetto alla LT. Data la condizione di ortogonalità rispetto al PV e al PL tali proiezioni saranno rappresentate da un segmento.

È possibile rappresentare le figure piane, solo se queste si trovano in condizioni di parallelismo rispetto al piano di proiezione. In tali condizioni proiettive l'immagine manterrà la vera forma e grandezza dell'oggetto reale.

Direzioni dei raggi proiettanti rispetto ai Piani Principali





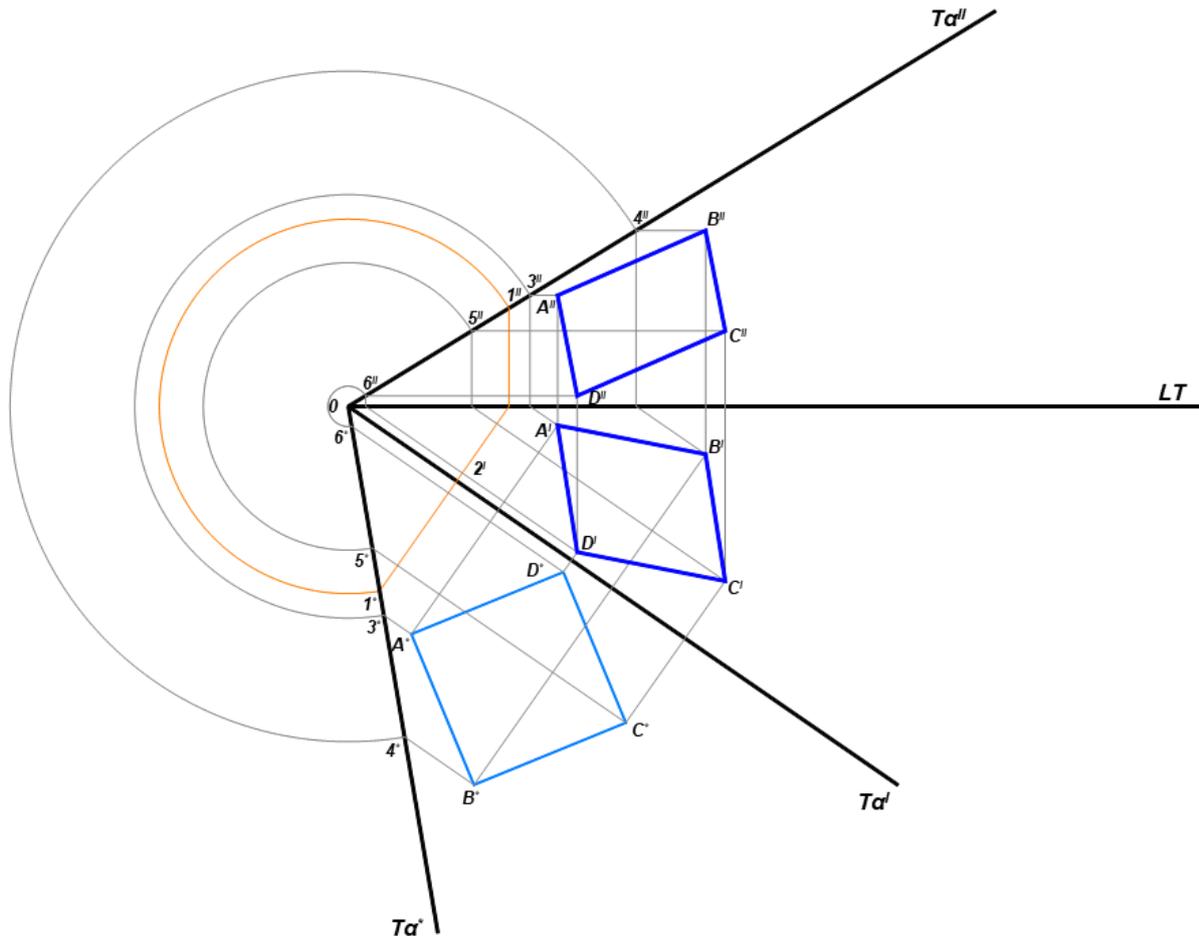
Il quadrato, ortogonale al piano orizzontale e inclinato rispetto ai piani verticale e laterale non permette, una immediata rappresentazione della figura sui piani principali. Non potendosi applicare la condizione di parallelismo, l'unica che permette di rappresentare oggettivamente le figure piane sui piani principali, imposteremo anche in questo caso una proiezione virtuale su un piano ausiliario. Impostato α , piano d'appartenenza del quadrato, con le relative tracce $T\alpha'$, $T\alpha''$ e $T\alpha'''$, si ipotizza il ribaltamento sul piano orizzontale, intorno alla cerniera $T\alpha'$. Rappresentiamo il quadrato ABCD in vera forma e grandezza sul piano α ribaltato e ricordando che "i punti ruotano secondo piani ortogonali alla cerniera", procediamo alla proiezione dei punti ortogonalmente alla $T\alpha'$.

Data la condizione d'appartenenza del quadrato ABCD con il piano α , la proiezione sul piano orizzontale coinciderà con la traccia del piano ausiliario. I punti in seconda proiezione si determineranno nell'intersezione dei raggi proiettanti provenienti dal piano orizzontale con i raggi provenienti dal piano ribaltato α . I punti del piano α saranno proiettati ortogonalmente alla $T\alpha''$, e successivamente, poiché "i punti ruotano mantenendo inalterata la loro distanza dalla cerniera", riportati con il compasso dal punto di intersezione di $T\alpha''$ con la linea di terra. Nel punto di intersezione fra gli archi e la $T\alpha''$, si tracceranno i raggi proiettanti ortogonali alla $T\alpha''$, fino ad intercettare il raggio proiettante ortogonale proveniente dal piano orizzontale. Unendo i punti consecutivi si ottiene il quadrilatero ABCD proiezione sul piano verticale.

Per la definizione della proiezione sul piano laterale sarà sufficiente intercettare sul piano laterale i raggi proiettanti ortogonali provenienti dal piano orizzontale e dal piano verticale. Unire, sul piano laterale, i punti consecutivi e rappresentare il quadrilatero ABCD in terza proiezione.

La rotazione dei piani è definita da quattro regole fondamentali per la corretta esecuzione della gran parte dei problemi proiettivi.

1. I piani ruotano rispetto ad una retta detta cerniera
2. I punti del piano mantengono durante la rotazione la stessa distanza dalla cerniera
3. I punti del piano descrivono, durante la rotazione, archi che hanno il centro nella cerniera
4. Gli archi di rotazione appartengono a piani ortogonali alla cerniera



Proiezione ortogonale di un quadrato appartenente ad un piano α genericamente inclinato

1 – Impostazione del piano d'appartenenza α

Tracciare la linea di terra LT.

Partendo dall'estremo 0 tracciare la $T\alpha'$. Partendo dall'estremo 0 tracciare la $T\alpha''$.

2 – Ribaltamento del piano d'appartenenza α

Individuare $1''$ sulla $T\alpha''$, proiettarlo sulla LT e successivamente proiettare tale intersezione ortogonalmente alla $T\alpha'$ determinando $2'$.

Tracciare l'arco di centro 0 e raggio 0- $1''$ e determinare 1^* sulla perpendicolare per $2'$.

Tracciare $T\alpha^*$ passante per 0 e 1^* .

3 – Proiezione di ABCD sul piano α

Tracciare il quadrato ABCD, oggettivo, sul piano α .

4 – Proiezione dei punti A-B-C-D su PO e PV

Proiettare A^* ortogonalmente a $T\alpha'$ sul PO. Proiettare A^* parallelamente a $T\alpha'$ fino ad intercettare $T\alpha''$ nel punto 3^* .

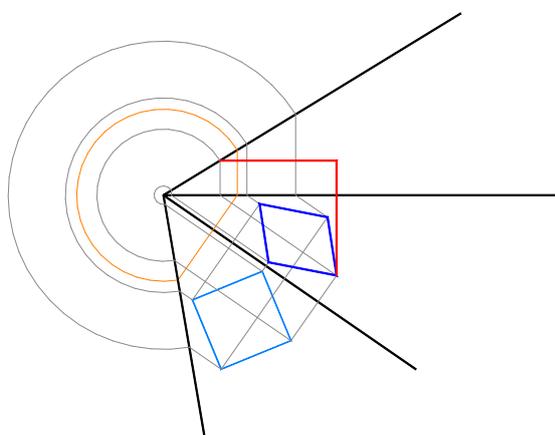
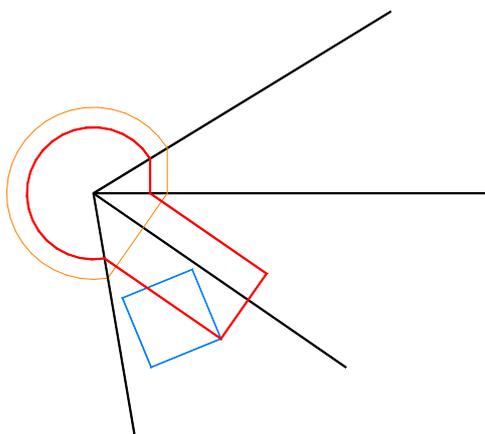
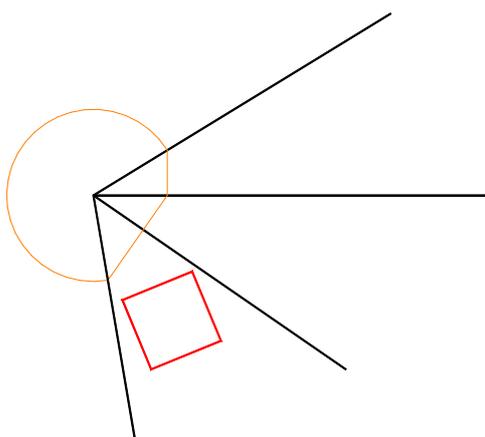
Con centro 0 tracciare l'arco di raggio 0- 3^* e determinare $3''$ su $T\alpha''$.

Tracciare il raggio orizzontale passante per $3''$. Tracciare il raggio verticale passante per $3''$ fino ad intercettare la LT.

Dall'intersezione con la LT tracciare il raggio con direzione $T\alpha'$ e determinare A' .

Tracciare il raggio proiettante passante per A' e determinare A'' sul raggio orizzontale passante per $3''$.

Procedere in modo analogo per quanto riguarda i punti B, C e D. Unire i punti e determinare le proiezioni del quadrato A-B-C-D su PO e PV.

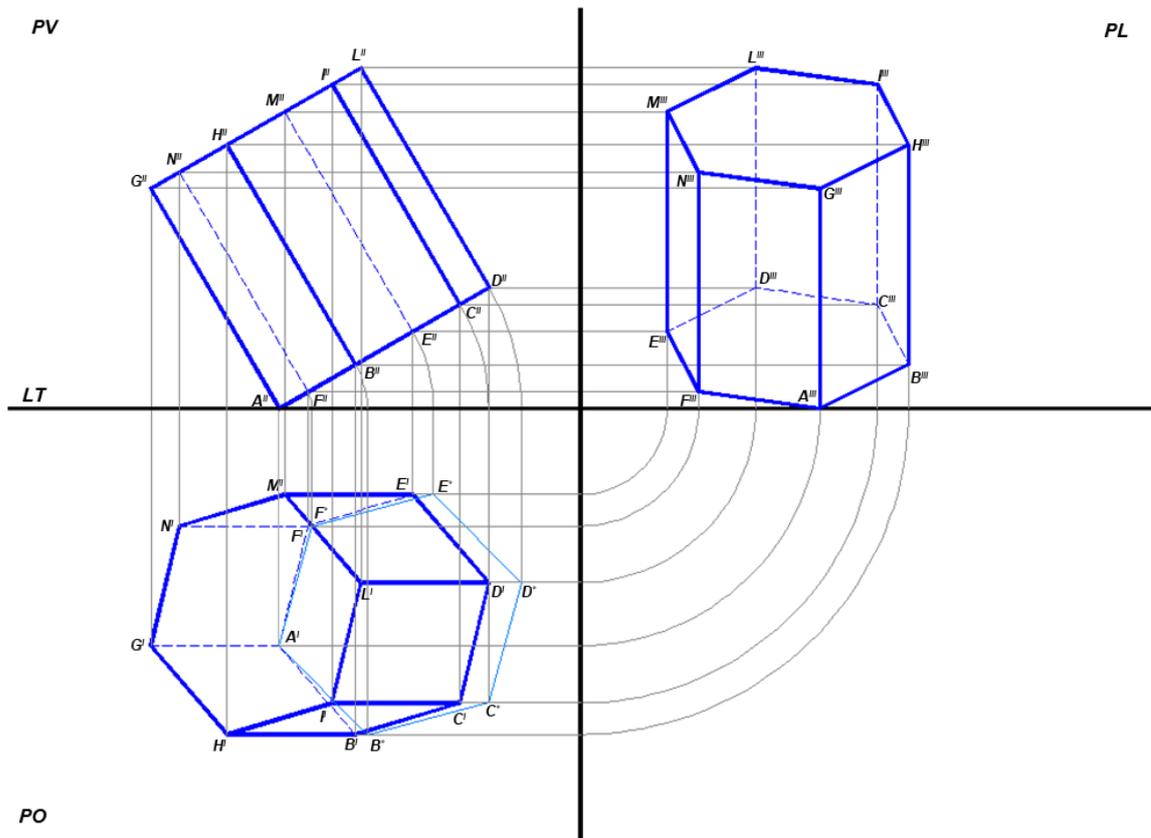


In questo esercizio il quadrato ABCD appartiene ad un piano α generico del quale sono note le tracce $T\alpha^1$ e $T\alpha^2$. Per determinare la doppia proiezione si rende quindi necessario impostare il ribaltamento del piano α su uno dei piani principali. Scegliamo di ribaltare α intorno alla cerniera di rotazione $T\alpha^1$, individuando a piacere il punto 1 sulla $T\alpha^2$, traccia del piano α sul piano verticale. Poiché il punto 1 si trova sul piano verticale manterrà inalterata la sua distanza da 0 intersezione di α con la linea di terra. Per determinare il ribaltamento di 01 sul piano orizzontale, riportiamo con il compasso un arco di centro 0 e raggio 01. Poiché il punto 1 mantiene durante la rotazione la stessa distanza dalla cerniera esso si troverà necessariamente in un punto dell'arco. L'altra condizione che si applica per la determinazione del ribaltamento del piano α intorno a $T\alpha^1$, è la rotazione dei punti secondo piani ortogonali alla cerniera. Si procederà quindi alla proiezione del punto 1'' sul piano orizzontale (ovvero sulla LT) e alla sua successiva proiezione ortogonalmente alla $T\alpha^1$, fino all'intersezione con l'arco di centro 0 e raggio 01. La retta passante per 0 e per 1*, rappresenta $T\alpha^*$, ribaltamento della $T\alpha^2$ sul piano orizzontale. Sarà a questo punto possibile rappresentare oggettivamente, in vera forma, il quadrato ABCD sul piano α ribaltato sul piano orizzontale.

Per determinare la prima proiezione di un punto del quadrato si procederà tenendo conto che i punti ruotano mantenendo inalterata la distanza dalla cerniera e che la stessa rotazione avviene secondo piani ortogonali alla cerniera. La linea mista evidenzia chiaramente il percorso proiettivo da applicare a tutti i punti della figura in vera forma.

La proiezione sul piano verticale sarà data dall'intersezione fra il raggio ortogonale alla linea di terra proveniente dal piano orizzontale e il raggio parallelo al piano orizzontale alla stessa quota del punto riportata sulla $T\alpha^2$.

Proiezioni ortogonali | Solidi



Prisma con asse parallelo al piano verticale e base esagonale inclinata di 30° al piano orizzontale

1 – Impostazione

Tracciare la linea di terra LT. Tracciare la retta verticale ortogonale a LT e individuare i piani principali di proiezione PO, PV e PL.

2 – La base inferiore sul PO

Tracciare sul PO l'esagono di base $A^1 B^1 C^1 D^1 E^1 F^1$ di misure oggettive. Proiettare i punti ortogonalmente alla LT. Tracciare nell'intersezione sulla LT del raggio proiettante passante per A una retta inclinata di 30°. Riportare col compasso puntando su A^{11} gli archi fino all'intersezione con la retta inclinata individuando:

$F^{11} - B^{11} - E^{11} - C^{11} - D^{11}$. Determinare la prima proiezione nell'intersezione fra il raggio proiettante della proiezione sul PV e il raggio ortogonale alla cerniera passante per la base ribaltata: $B^1 - C^1 - D^1 - E^1 - F^1$

3 – La proiezione sul PV

Tracciare sul PV, la retta d'appartenenza della base superiore alla distanza, dalla base inferiore, pari all'altezza del prisma. Tracciare sul PV le proiezioni degli spigoli laterali: A-G D-L F-N B-H E-M C-I. Ripassare gli spigoli esterni A-D-L-G e gli spigoli interni a vista B-H e C-I. Ripassare gli spigoli interni nascosti della figura: F-N e E-M.

4 – La base superiore sul PO

Determinare la prima proiezione nell'intersezione fra il raggio proiettante della proiezione sul PV e il raggio ortogonale alla cerniera (linea verde) passante per la base inferiore sul PO: $H^1 - I^1 - L^1 - M^1 - N^1 - G^1$. Unire gli spigoli.

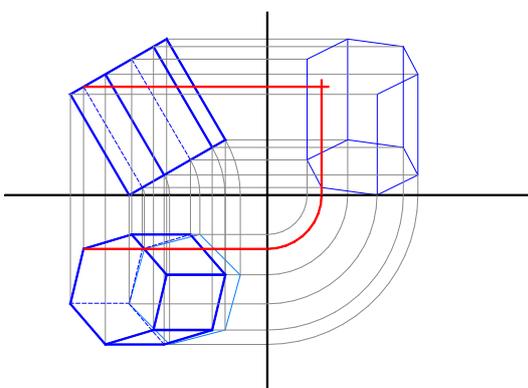
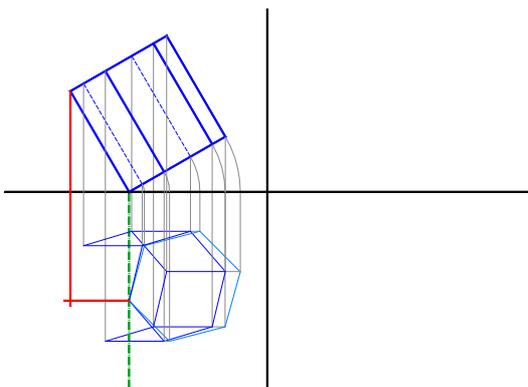
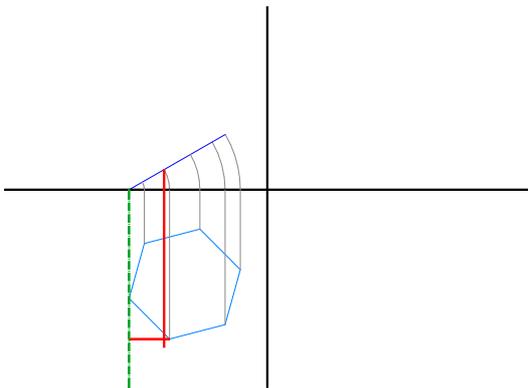
5 – Completamento della proiezione sul PO

Ripassare il contorno esterno della figura. Ripassare le parti a vista interne della figura. Ripassare le parti nascoste all'interno della figura.

6 – Proiezione sul PL e completamento

Determinare l'intersezione fra i raggi proiettanti provenienti dal PO e dal PV: A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N.

Ripassare il contorno esterno della figura, le parti a vista interne della figura e le parti nascoste all'interno della figura.



Il prisma a base esagonale inclinata di 30° rispetto al piano orizzontale, mantiene la condizione di parallelismo degli spigoli laterali rispetto al piano verticale. Un vertice della base inferiore coincide con il piano orizzontale. Date la posizione del solido e le condizioni proiettive gli spigoli laterali si proietteranno con le dimensioni oggettive solamente sul piano verticale mentre le basi esagonali si presenteranno scorciate sui piani orizzontale e laterale. Dopo avere rappresentato oggettivamente l'esagono sul piano orizzontale, procederemo alla impostazione di una cerniera ortogonale al piano verticale passante per il vertice coincidente con il piano orizzontale e successivamente tratteremo, inclinandola di 30° la retta d'appartenenza della proiezione della base sul piano verticale. Tenendo conto che i punti ruotano mantenendo la stessa distanza dalla cerniera, si determinerà la seconda proiezione della base inferiore riportando sulla retta inclinata le intersezioni dei raggi proiettanti sulla linea di terra. Determinare in seguito la prima proiezione della base nell'intersezione fra i raggi proiettanti passanti per il piano verticale e i raggi ortogonali passanti per l'esagono oggettivo e ortogonali alla cerniera.

Gli spigoli laterali manterranno, nella seconda proiezione, la condizione di ortogonalità rispetto alla base. Potranno quindi date le direzioni ortogonali alla retta inclinata di 30° essere rappresentate in misura oggettiva. Le due basi del prisma manterranno fra loro la condizione di parallelismo e l'ortogonalità rispetto al piano verticale.

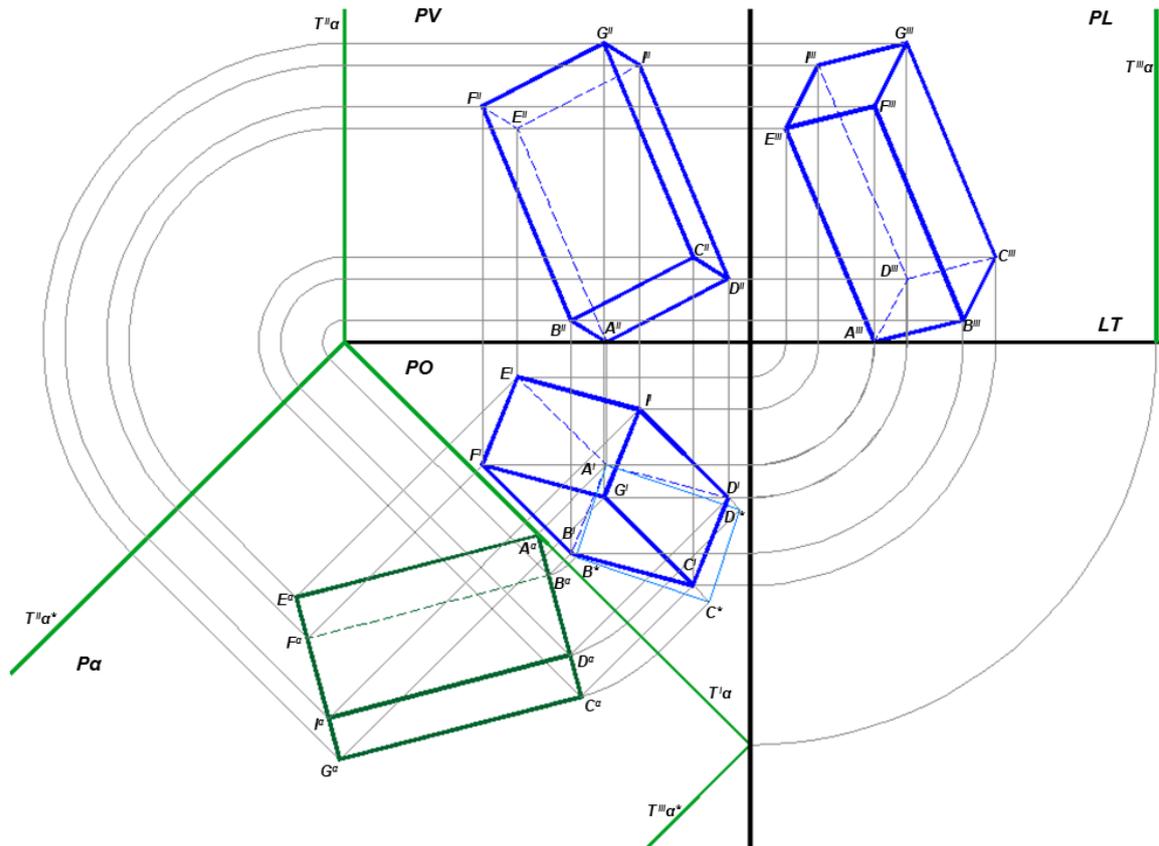
La proiezione sul piano laterale non presenta elementi di novità rispetto agli esercizi precedenti. È comunque bene ricordare che per la determinazione delle parti nascoste si deve tenere conto della direzione dei raggi proiettanti ortogonali al piano laterale.

È fondamentale verificare le condizioni di appartenenza degli elementi fra loro.

In particolare:

- 1. un punto appartiene ad una retta se le proiezioni del punto appartengono alle rispettive proiezioni della retta.*
- 2. una retta appartiene ad un piano se le sue tracce appartengono alle rispettive tracce del piano.*
- 3. un punto appartiene ad un piano se appartiene ad una retta appartenente anch'essa al piano.*

Proiezioni ortogonali | Solidi



Parallelepipedo con l'asse inclinato di 60° rispetto al PO e parallelo ad un piano α ortogonale al PO e inclinato di 45° sia al PV che al PL. (Metodo dei piani ausiliari)

1 - Impostazione dei piani di proiezione: Impostare il piano α : $T^I\alpha$, $T^{II}\alpha$, $T^{III}\alpha^*$, $T^{III}\alpha^*$, $T^{III}\alpha$.

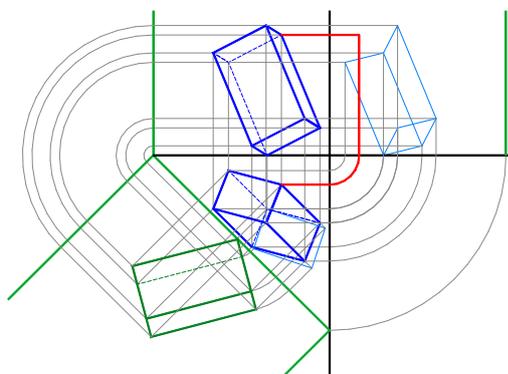
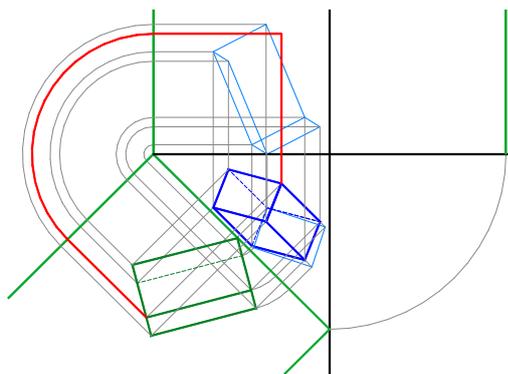
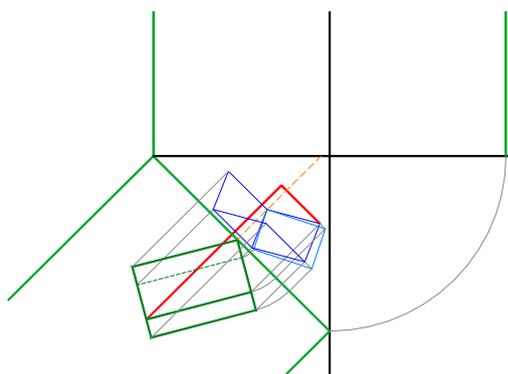
2 - Schema delle proiezioni: Proiettare i punti ortogonalmente ai piani di proiezione, secondo le direzioni indicate nello schema.

3 - Proiezione sul piano ausiliario: Rappresentare in posizione generica la base ABCD sul PO mantenendo le dimensioni reali. Proiettare il punto A sul piano ausiliario α . Tracciare su α la retta d'appartenenza della base. Proiettare la base ortogonalmente alla $T^I\alpha$, e successivamente puntando in A^α ruotare fino ad intercettare la retta inclinata: B^α , D^α , C^α . Tracciare la retta d'appartenenza della base superiore parallela a quella inferiore (ABCD) alla distanza pari all'altezza del solido. Tracciare, ortogonalmente alle basi, gli spigoli: AE, CG, BF, DI. Ripassare a vista il contorno esterno della figura: EACG. Ripassare a vista le parti interne della figura: DI. Ripassare le parti nascoste della figura: F

4 - Proiezione sul piano orizzontale: impostare la cerniera di rotazione ortogonalmente a $T^I\alpha$ e passante per A^I . Proiettare la base ortogonalmente alla cerniera di rotazione e dal piano ausiliario ortogonalmente alla $T^I\alpha$. Ripassare con segno di linea a vista il contorno esterno della figura. Ripassare le parti interne a vista della figura. Ripassare le parti interne nascoste della figura.

5 - Proiezione sul piano verticale: Proiettare i punti della figura sul PO ortogonalmente alla LT e i punti della figura sul piano ausiliario secondo le direzioni rosse esemplificate nello schema delle proiezioni presentato nella pagina a lato. Ripassare con segno di linea a vista il contorno esterno della figura. Ripassare le parti interne a vista della figura. Ripassare le parti interne nascoste della figura.

6 - Proiezione sul piano laterale: Proiettare ortogonalmente i punti delle figure sul PO e sul PV. Ripassare con segno di linea a vista il contorno esterno della figura. Ripassare le parti interne a vista della figura. Ripassare le parti interne nascoste della figura.



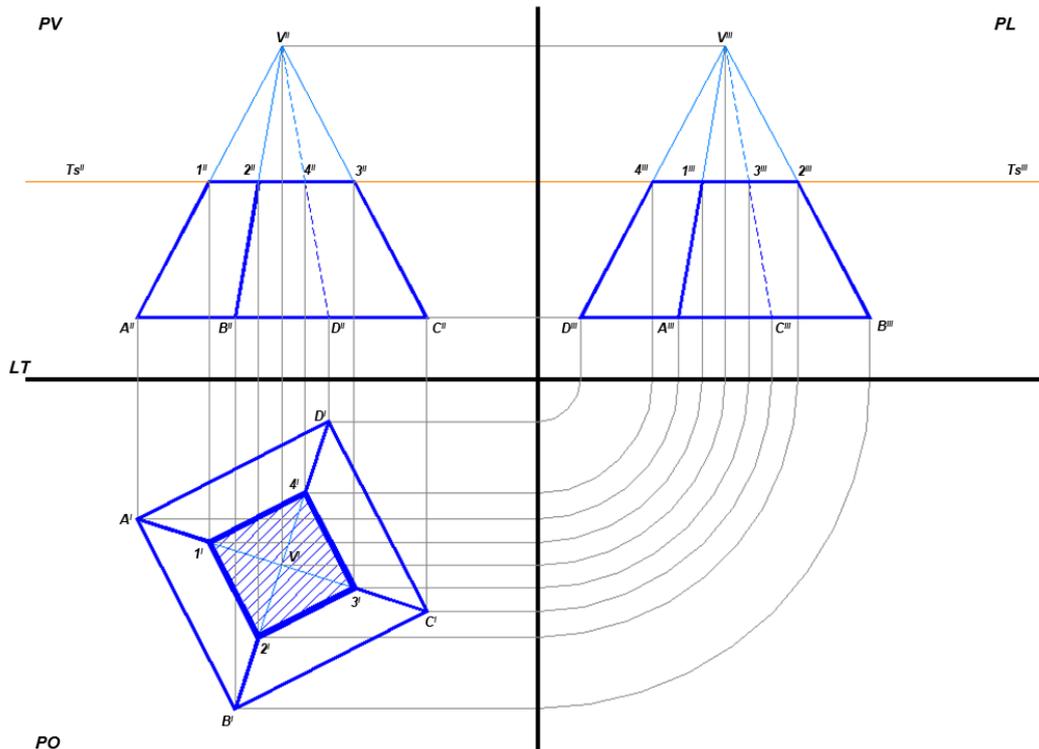
Il metodo dei piani ausiliari viene utilizzato in tutte le situazioni proiettive in cui gli elementi dell'oggetto, in genere ma non necessariamente un solido, si trovano in posizione casuale rispetto ai piani principali di proiezione. Tenendo conto che è possibile rappresentare direttamente gli elementi di base (segmenti, figure piane) solo quando questi si trovano in condizione di parallelismo o coincidenza rispetto ai piani di proiezione, si rende necessario l'utilizzo di un ulteriore piano di proiezione, detto appunto ausiliario che opportunamente definito permette di rappresentarvi le proiezioni del solido genericamente, ma univocamente, posizionato. Il metodo, pur nelle diversificate situazioni proiettive, si basa sulle quattro norme fondamentali che regolano la rotazione dei piani già citate in precedenti esercizi. Oltre a queste regole basilari è altrettanto importante tracciare i raggi proiettanti sempre ortogonalmente ai piani di proiezione, siano essi principali (PO, PV e PL) oppure generici o virtuali come il caso dei piani ausiliari.

Impostare il piano ausiliario attraverso la determinazione delle sue tracce: $T^I\alpha$, inclinata di 45° rispetto alla LT e al piano laterale; $T^{II}\alpha$ e $T^{III}\alpha$, ortogonali alla LT; $T^{II}\alpha^*$ e $T^{III}\alpha^*$ ribaltamento delle omonime tracce sul piano orizzontale, ortogonali rispetto alla $T^I\alpha$. Dopo avere tracciato la base inferiore in vera forma sul piano orizzontale si proietta sul piano ausiliario α inclinando la retta d'appartenenza di 30° come specificato nel testo. Proiettare sul piano ausiliario la base rappresentata sul piano orizzontale in vera forma e riportare sulla retta inclinata alla stessa distanza dalla cerniera, passante in questo caso nel vertice della base coincidente con il piano orizzontale. L'intersezione fra i raggi proiettanti provenienti dal piano ausiliario e i raggi ortogonali alla cerniera di rotazione determina i punti in prima proiezione.

La seconda proiezione segue un percorso più articolato ma pur sempre all'interno della stessa metodologia applicata nei passaggi precedenti. Proiettare l'immagine del piano ausiliario ortogonalmente alla $T^{II}\alpha^*$ e riportare l'intersezione con il compasso alla stessa distanza sul piano verticale. Successivamente determinare nell'intersezione con i raggi ortogonali provenienti dal piano orizzontale la seconda proiezione.

Date la prima e seconda proiezione del solido, resta invariata la metodologia per determinare la terza proiezione sul piano laterale.

Proiezioni ortogonali | Sezioni



Proiezione ortogonale: sezione orizzontale di una piramide a base quadrata

1 – Impostazione della proiezione ortogonale

Tracciare la linea di terra (LT). Tracciare il piano ortogonale e individuare PO, PV e PL.

2 – Proiezione sul PO

Rappresentare, in posizione generica parallela al PO, il quadrato ABCD base della piramide. Tracciare le diagonali BD, AC e individuare nell'intersezione la proiezione del vertice V.

3 – Proiezione sul PV

Tracciare alla quota d dalla LT la retta d'appartenenza della base ABCD. Tracciare alla quota h dalla retta della base, l'altezza del vertice della piramide. Proiettare sulla retta d'appartenenza della base sul PV: A – B – C – D e V ad altezza h . Rappresentare la base ABCD e successivamente tracciare: AV – CV – BV – DV.

4 – Proiezione sul PL

Proiettare sulla retta d'appartenenza della base sul PL: D – A – C – B e V ad altezza h . Rappresentare la base ABCD. Rappresentare: DV – BV – AV – CV.

5 – Impostazione della sezione

Rappresentare Ts^{II} e Ts^{III} tracce del piano di sezione orizzontale ad altezza n rispetto alla LT.

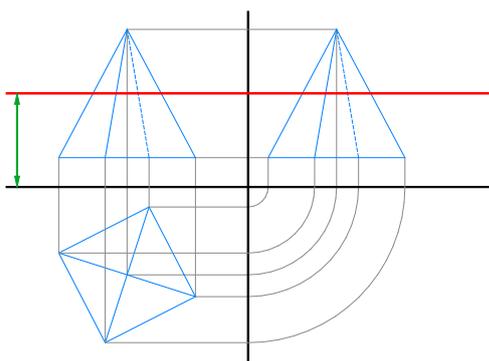
6 – Determinazione dei punti di sezione

Proiettare sul PO le intersezioni del piano di sezione con le proiezioni sul PV e PL:

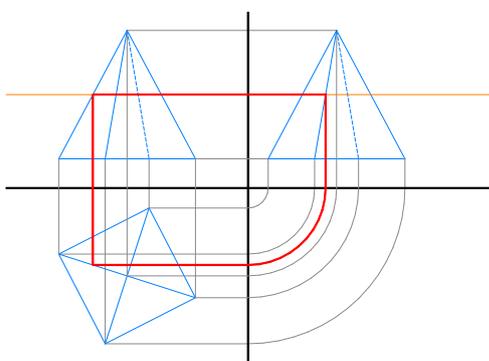
- 1 sullo spigolo AV.
- 2 sullo spigolo BV.
- 3 sullo spigolo CV.
- 4 sullo spigolo DV.

7 – Completamento grafico

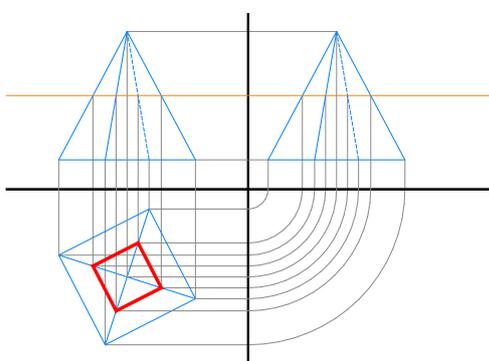
Ripassare il contorno della sezione sul PO (1-2-3-4) con spessore doppio rispetto alle parti a vista. Campire l'area di sezione con tratteggio inclinato di 45° . Ripassare le parti a vista e nascoste delle proiezioni su PO, PV e PL.



Rappresentare la proiezione ortogonale di una piramide a base quadrata ABCD e vertice V, genericamente ruotata intorno al proprio asse di un angolo α , in modo da non determinare nelle proiezioni sui piani verticale e laterale coincidenze fra i punti della base. Impostare sui piani verticale e laterale il piano di sezione orizzontale, per mezzo delle sue tracce Ts'' e Ts' a distanza n dalla linea di terra. Il piano secante divide la piramide in due parti, una superiore comprendente il vertice e una inferiore comprendente la base, che sarà l'oggetto della rappresentazione. Immaginiamo quindi di asportare la parte superiore e rappresentare il tronco di piramide rimanente.



La posizione del piano secante ortogonale ai piani verticale e laterale ci permette di individuare i punti di sezione degli spigoli AV, BV, CV e DV nell'intersezione fra le tracce seconda e terza del piano secante e le proiezioni degli spigoli. Proiettare i punti di sezione dai piani verticale e laterale sul piano orizzontale e determinare nelle corrispondenti proiezioni degli spigoli la sezione sul piano orizzontale. I raggi proiettanti del piano verticale e del piano laterale dovranno, a meno di grossolani errori grafici, incontrarsi nello stesso punto della proiezione sul piano orizzontale. Si consiglia di indicare i punti di sezione con i numeri per poterli individuare più chiaramente rispetto ai punti della figura di base.

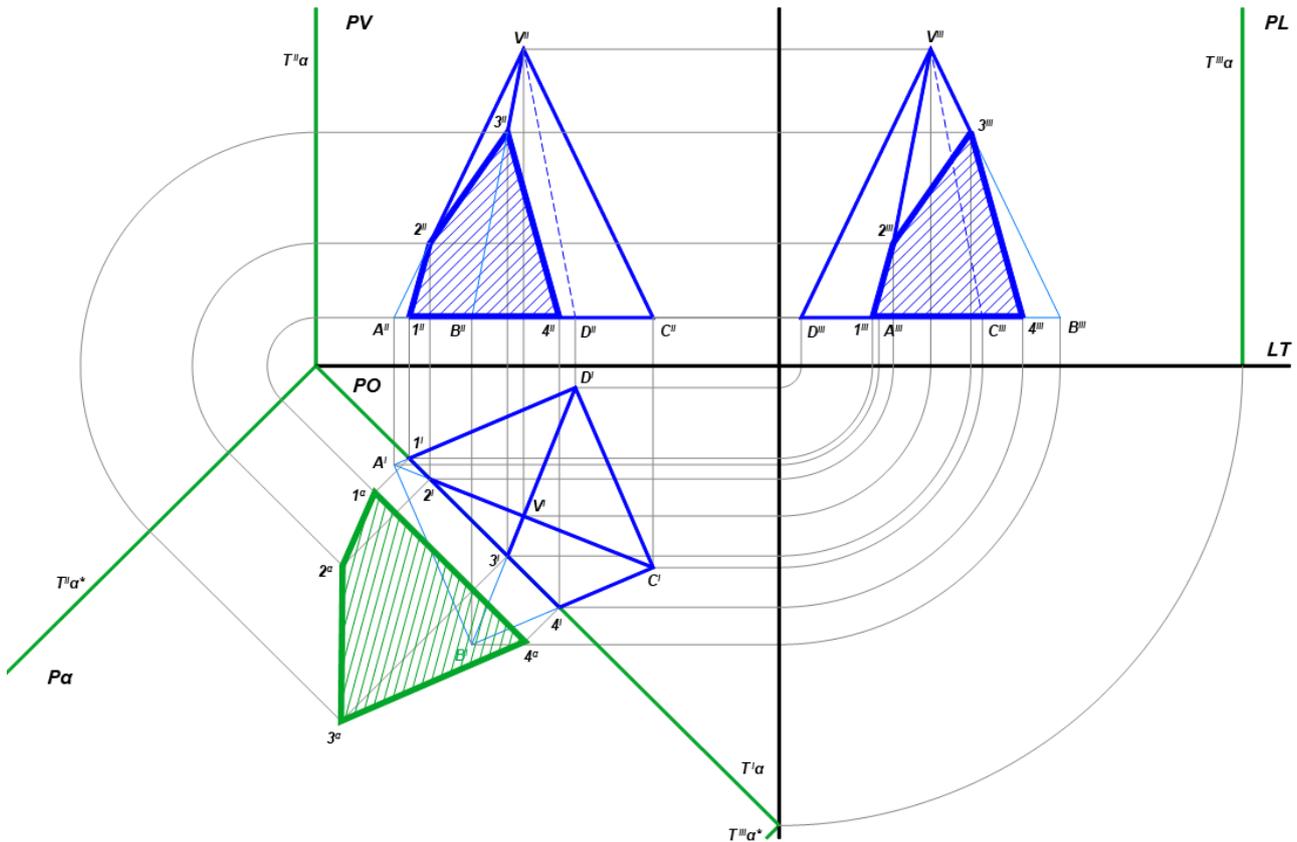


La proiezione sul piano orizzontale, data la posizione del piano secante, determina una sezione simile per forma, ma inferiore per dimensione, alla base della piramide.

considerata a tutti gli effetti la sezione in vera forma e grandezza poiché proiettata su un piano ad essa parallelo. Come indicato nel procedimento esecutivo della pagina precedente, il contorno della sezione dovrà essere rappresentato con spessore pari al doppio delle parti a vista e campita al suo interno con tratteggio inclinato di 45° .

La rappresentazione che rende possibile la descrizione dell'interno di un solido è la sezione. Convenzionalmente nell'ambito dell'architettura si definisce con il termine sezione il taglio verticale, mentre si definisce pianta l'immagine determinata dal taglio di un piano secante orizzontale.

Proiezioni ortogonali | Sezioni



Proiezione ortogonale: sezione verticale con piano secante ortogonale al PO e inclinato rispetto al PV e al PL, di una piramide a base quadrata.

1 – Impostazione e proiezione ortogonale.

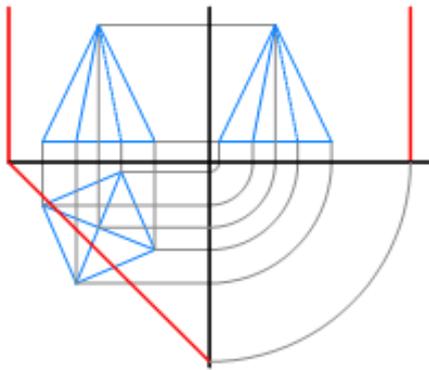
Tracciare la LT, linea di terra. Tracciare il piano ortogonale e individuare PO, PV e PL. Rappresentare, in posizione generica parallela al PO, il quadrato ABCD base della piramide. Tracciare le diagonali AC, BD e individuare nell'intersezione la proiezione del vertice V. Tracciare alla quota d dalla LT la retta d'appartenenza della base ABCD. Tracciare alla quota h dalla retta della base, l'altezza del vertice della piramide. Proiettare sulla retta d'appartenenza della base sul PV: A – C e unire con segno di figura. Proiettare sulla retta della base i punti: B, D e V ad altezza h. Rappresentare: AV – CV – BV – DV. Proiettare sulla retta d'appartenenza della base sul PL: D – B, unire con segno di figura, e a seguire i punti A e C. Proiettare all'altezza della piramide il vertice V. Rappresentare: DV – BV – AV – CV.

2 – Impostazione della sezione.

Rappresentare $T^{\alpha I}$ e $T^{\alpha III}$ e determinare nelle intersezioni con la figura i punti: 1 su AB, 2 su BV, 3 su CV, 4 su DC. Ripassare le parti a vista della prima proiezione (PO). Ripassare le parti a vista e le parti nascoste, della terza proiezione (PL). Tracciare i raggi ortogonali in prima e terza proiezione e determinare in seconda proiezione i punti di sezione: 1 – 2 – 3 – 4. Unire con spessore doppio rispetto alle parti a vista il contorno della sezione 1-2-3-4. Tratteggiare con segno a 45° l'area della sezione. Ripassare le parti a vista. Ripassare le parti nascoste.

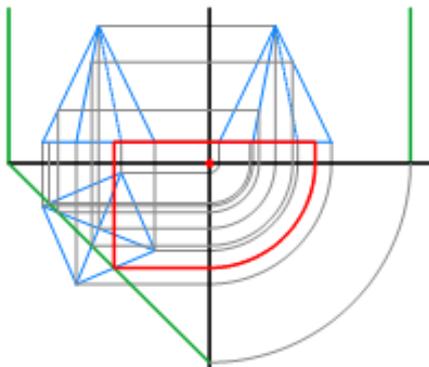
3 – Determinazione della sezione oggettiva.

Ribaltamento del piano secante sul PO intorno alla cerniera $T^{\alpha I}$. Proiettare ortogonalmente alla $T^{\alpha I}$ e alla $T^{\alpha II}$, e unire, i punti della sezione: 1 – 2 – 3 – 4. Ripassare il contorno della sezione sul piano α con spessore doppio rispetto alle parti a vista. Campitura dell'area di sezione con tratteggio inclinato di 45°.



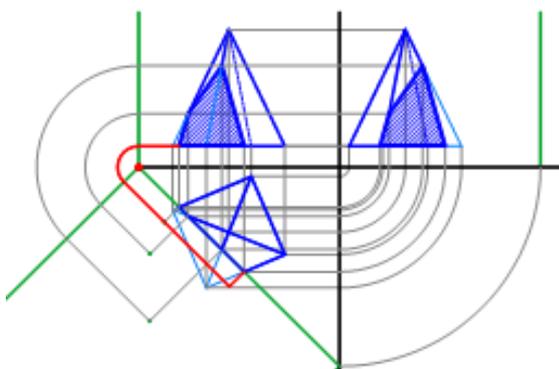
Data la piramide a base quadrata, parallela al piano orizzontale e ruotata rispetto ai piani verticale e laterale, determiniamo una sezione generata da un piano secante α ortogonale al piano orizzontale e inclinato rispetto ai piani verticale e laterale.

Per la determinazione dei punti di sezione si individuano le intersezioni sul piano orizzontale fra $T^1\alpha$ e la prima proiezione della piramide.

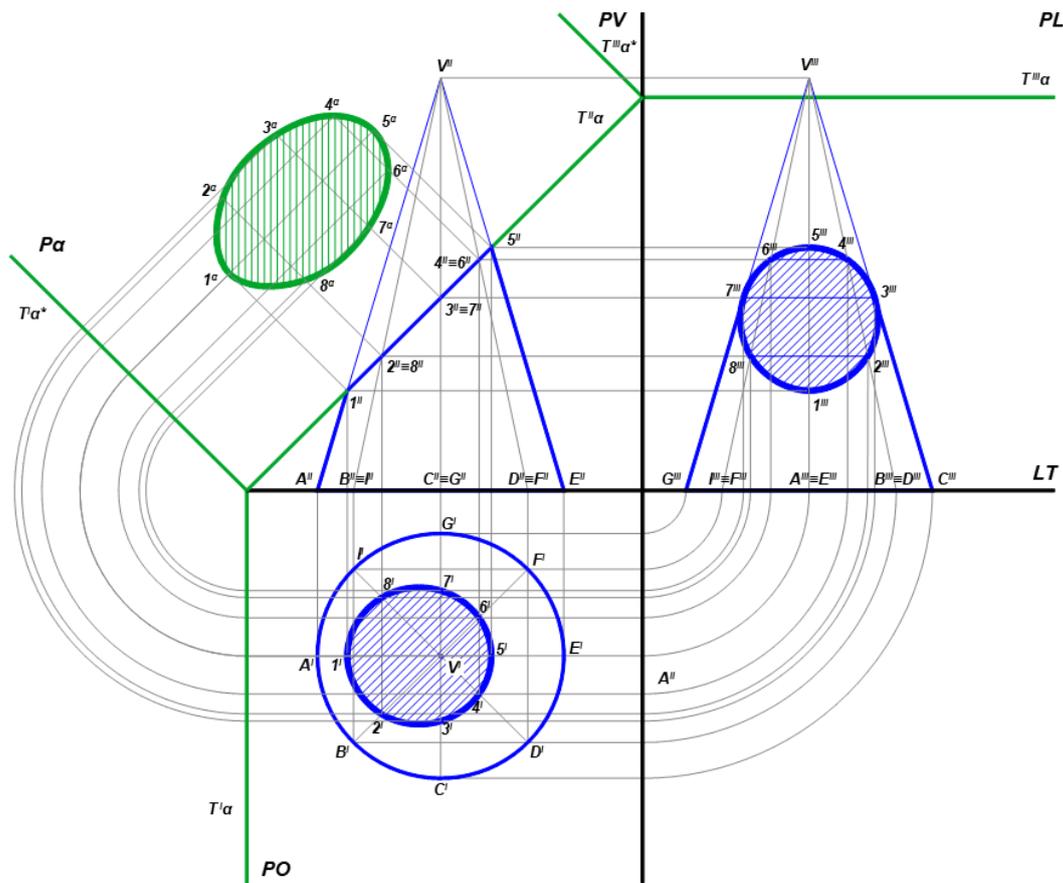


In particolare poiché il piano secante α si trova in posizione ortogonale rispetto al piano orizzontale, i punti di sezione nella prima proiezione sono dati dalle intersezioni della $T^1\alpha$ con la proiezione del solido. Proiettare successivamente i punti di sezione sui piani verticale e laterale, tenendo conto che i raggi proiettanti dovranno coincidere con i corrispondenti spigoli della figura. Unendo in successione i punti della sezione si ottengono, sui piani verticale e laterale, le proiezioni scorciate del solido sezionato.

La proiezione della sezione oggettiva, ovvero la sezione in vera forma e grandezza del solido sarà rappresentata sul piano α opportunamente ribaltato intorno alla cerniera $T^1\alpha$. La proiezione oggettiva, in vera forma e grandezza della sezione sul piano secante ribaltato, si determinerà nell'intersezione fra le proiezioni ortogonali alla $T^1\alpha$ e le proiezioni ortogonali alla $T^1\alpha$.



I piani secanti possono trovarsi in varie posizioni rispetto al quadro e all'oggetto stesso. Oltre alla rappresentazione dell'oggetto sezionato è importante, in questi casi, determinare attraverso l'utilizzo di piani ausiliari, la vera forma e dimensione della superficie di sezione quando questa non si trova in condizione di parallelismo rispetto al quadro.



Ellisse: sezione con piano secante genericamente inclinato di un cono

1 – Proiezioni sui piani principali

Tracciare la linea di terra LT. Tracciare la verticale per LT individuando PO, PV e PL. Rappresentare sul PO la base del cono e il vertice V. Proiettare sul PV la base nella sua massima estensione AE. Proiettare il vertice V del cono su PO, PV e PL. Rappresentare il cono sul PV. Proiettare sul PL la base nella sua massima estensione GC. Rappresentare il cono sul PL.

2 – Impostazione del piano di sezione α

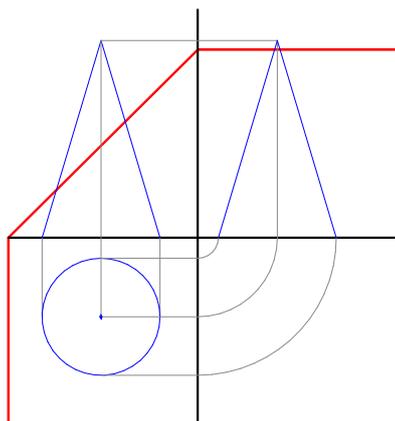
Tracciare, inclinata rispetto alla LT, la $T^{III}\alpha$ seconda traccia del piano di sezione α . Tracciare, ortogonalmente rispetto alla LT, la $T^I\alpha$ prima traccia del piano di sezione α . Tracciare, ortogonalmente rispetto al PV, la $T^{III}\alpha$, terza traccia del piano di sezione α . Ribaltare sul PV il piano α tracciando ortogonalmente alla $T^I\alpha$: $T^I\alpha^*$ e la $T^{III}\alpha^*$

3 – Proiezioni del cono sezionato

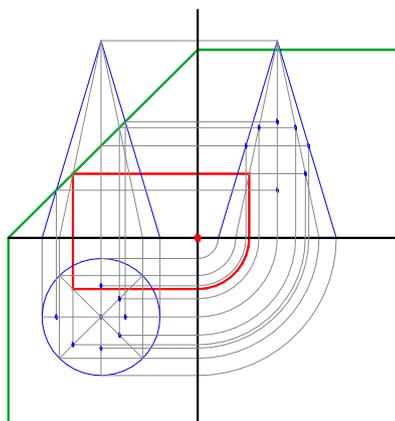
Dividere la circonferenza di base in 8 punti individuando per ognuno il corrispondente apotema: AV, BV, CV, DV, EV, FV, GV e IV. Proiettare i punti B e I sul PV. Tracciare BV sul PV. Proiettare i punti D e F sul PV. Tracciare DV sul PV. Proiettare i punti I e F sul PL. Tracciare IV sul PL. Proiettare i punti B e D sul PL. Tracciare BV sul PL. Proiettare i punti: 1 su AV; 2 su BV; 3 su CV; 4 su DV; 5 su EV; 6 su FV; 7 su GV e 8 su IV. Unire raccordandole le proiezioni dei punti sul PO e sul PL. Campire con tratteggio inclinato l'area di sezione. Ripassare con segno di parte a vista il contorno delle proiezioni sul PO, PV e PL.

4 – Determinazione dell'ellisse, sezione oggettiva del cono

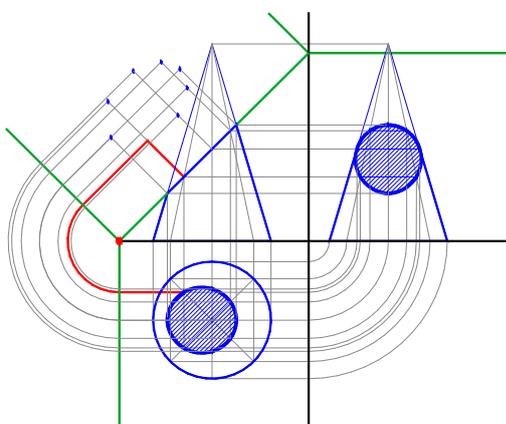
Proiettare ortogonalmente alla $T^I\alpha$ e alla $T^{III}\alpha$, i punti della sezione da 1 a 8. Unire raccordandole le proiezioni dei punti 1-8 sul piano α : ELLISSE. Campire con tratteggio inclinato l'area di sezione.



Un importante settore delle sezioni in proiezione ortogonale è rappresentato dalle sezioni coniche o più sinteticamente coniche, ovvero le sezioni del cono, solido determinato dalla rotazione intorno al proprio asse di una retta inclinata detta generatrice passante per il vertice oppure dalla rotazione di un triangolo rettangolo intorno a un suo cateto, sezionato da un piano α inclinato rispetto all'asse e a tutte le generatrici. In questo caso il piano α è ortogonale al piano verticale e inclinato rispetto ai piani orizzontale e laterale.

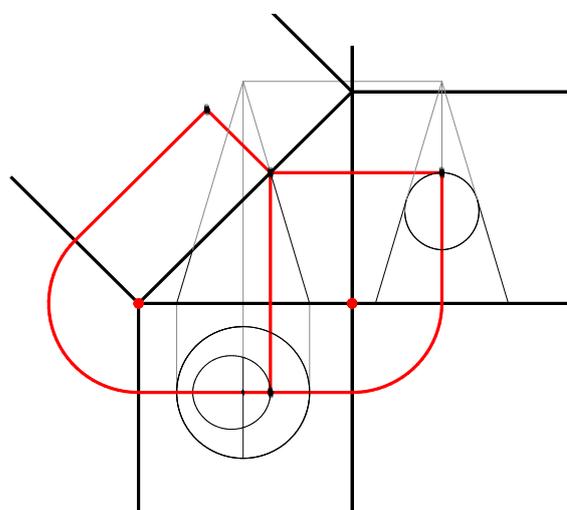


Per determinare la sezione del cono si divide la circonferenza di base in otto parti uguali facendo coincidere in questi punti le corrispondenti generatrici. La traccia $T^{\text{I}}\alpha$ seziona sul piano verticale il cono e tutte le sue generatrici comprese quindi le otto individuate in precedenza. Proiettare, dal piano verticale, i punti di sezione fra il piano α e le generatrici sui piani orizzontale e laterale e unire con una curva i punti così ottenuti. La sezione è rappresentata da una curva chiusa la cui forma è indipendente dall'angolazione del piano secante. Si evidenzia che ad un maggior numero di punti di divisione sulla circonferenza di base e di conseguenza di generatrici, corrisponde una maggiore precisione nella definizione della curva di sezione.

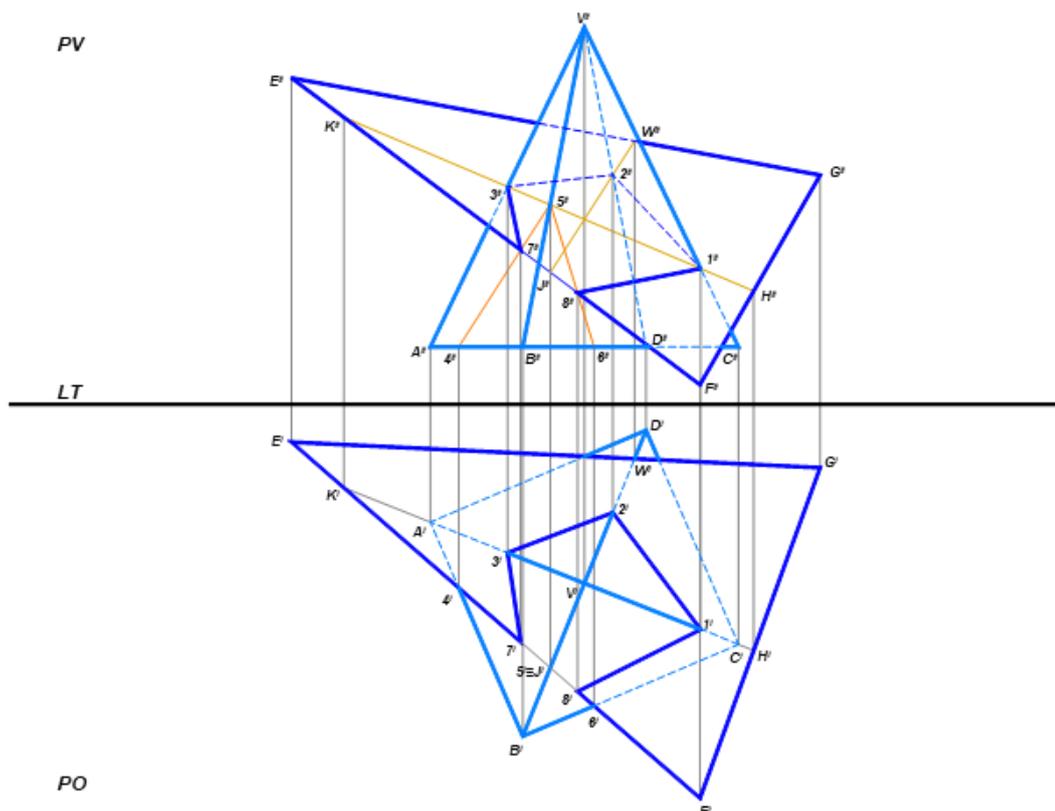


Per capire esattamente la tipologia della sezione sarà necessario, per mezzo del ribaltamento del piano secante sul piano verticale determinare la superficie di sezione in vera forma e grandezza. Dal ribaltamento si evince che data la posizione del piano secante rispetto al cono il luogo geometrico della curva chiusa di sezione è un'ellisse.

Schema delle proiezioni



Proiezioni ortogonali | Intersezioni



Intersezione di un triangolo genericamente inclinato e una piramide

1 – Impostazione della proiezione ortogonale

Tracciare LT, linea di terra e individuare PO e PV.

2 – Proiezione sul PO

Rappresentare, in posizione generica parallelo al PO, il quadrato ABCD base della piramide. Tracciare le diagonali AC, BD e individuare nell'intersezione la proiezione del vertice V.

3 – Proiezione sul PV

Tracciare alla quota d dalla LT la retta d'appartenenza della base ABCD. Tracciare alla quota h dalla retta della base, l'altezza del vertice della piramide. Proiettare sulla retta d'appartenenza della base sul PV i punti A B C D. Proiettare il vertice V all'altezza h. Unire le proiezioni: AV, CV, BV e DV.

4 – Proiezione del triangolo scaleno EFG

Tracciare il triangolo scaleno EFG sul PO. Proiettare i vertici E, F e G sul PV.

5 – Intersezioni della piramide sul triangolo

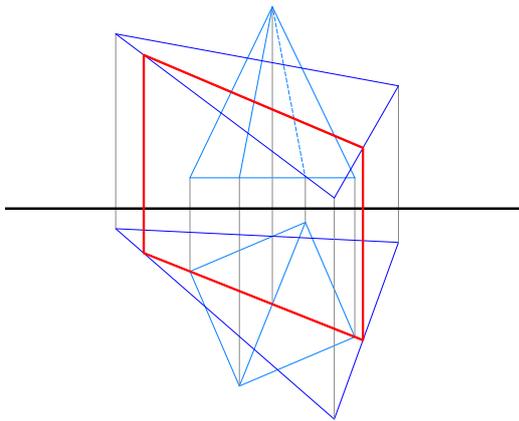
Individuare nel triangolo, HK, intersezione del piano verticale passante per AVC. Proiettare K e H sul PV. Unire HK e individuare 1 su CV e 3 su AV. Individuare nel triangolo, WJ, intersezione del piano verticale passante per BVD. Proiettare J e W sul PV. Unire JW e individuare 2 su DV.

6 – Intersezioni del triangolo sulla piramide

Sezionare la piramide con un piano verticale passante per EF. Individuare i punti: 4 su AB; 5 su BV; 6 su BC. Proiettare sul PV: 4 e 5. Unire 4-5 e individuare 7 su EF. Proiettare sul PV 6, unire 5-6 e individuare 8 su EF. Proiettare sul PO: 7, 8, 1, 2 e 3.

7 – Completamento della rappresentazione sul PO e sul PV

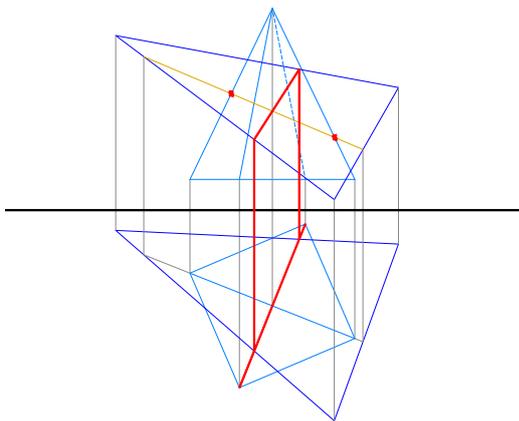
Rappresentare le parti a vista del triangolo. Rappresentare le parti a vista della piramide. Rappresentare le parti nascoste della piramide. Rappresentare le parti a vista del triangolo. Rappresentare le parti nascoste del triangolo. Rappresentare le parti a vista della piramide. Rappresentare le parti a nascoste della piramide.



Determinare la sezione del triangolo con un piano secante ortogonale al piano orizzontale passante per gli spigoli AV e CV della piramide.

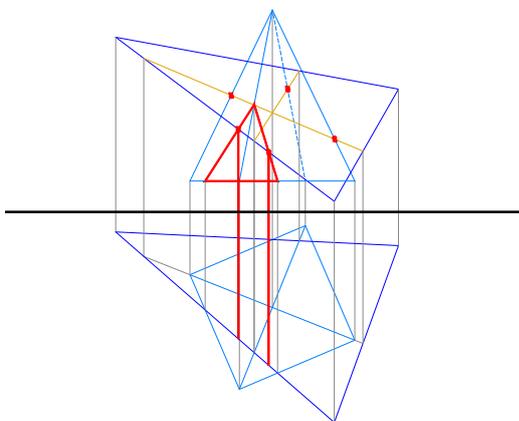
Determinare la sezione del triangolo con un piano secante ortogonale al piano orizzontale passante per gli spigoli BV e DV della piramide.

Determinare la sezione della piramide generata da un piano secante ortogonale al piano orizzontale passante per il lato EF del triangolo.

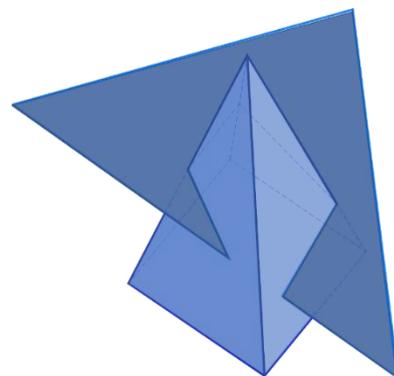


Le operazioni di proiezione, si basano sulla corrispondenza biunivoca che lega fra loro gli elementi rappresentati sui diversi piani. In particolare valgono i postulati di appartenenza della geometria elementare:

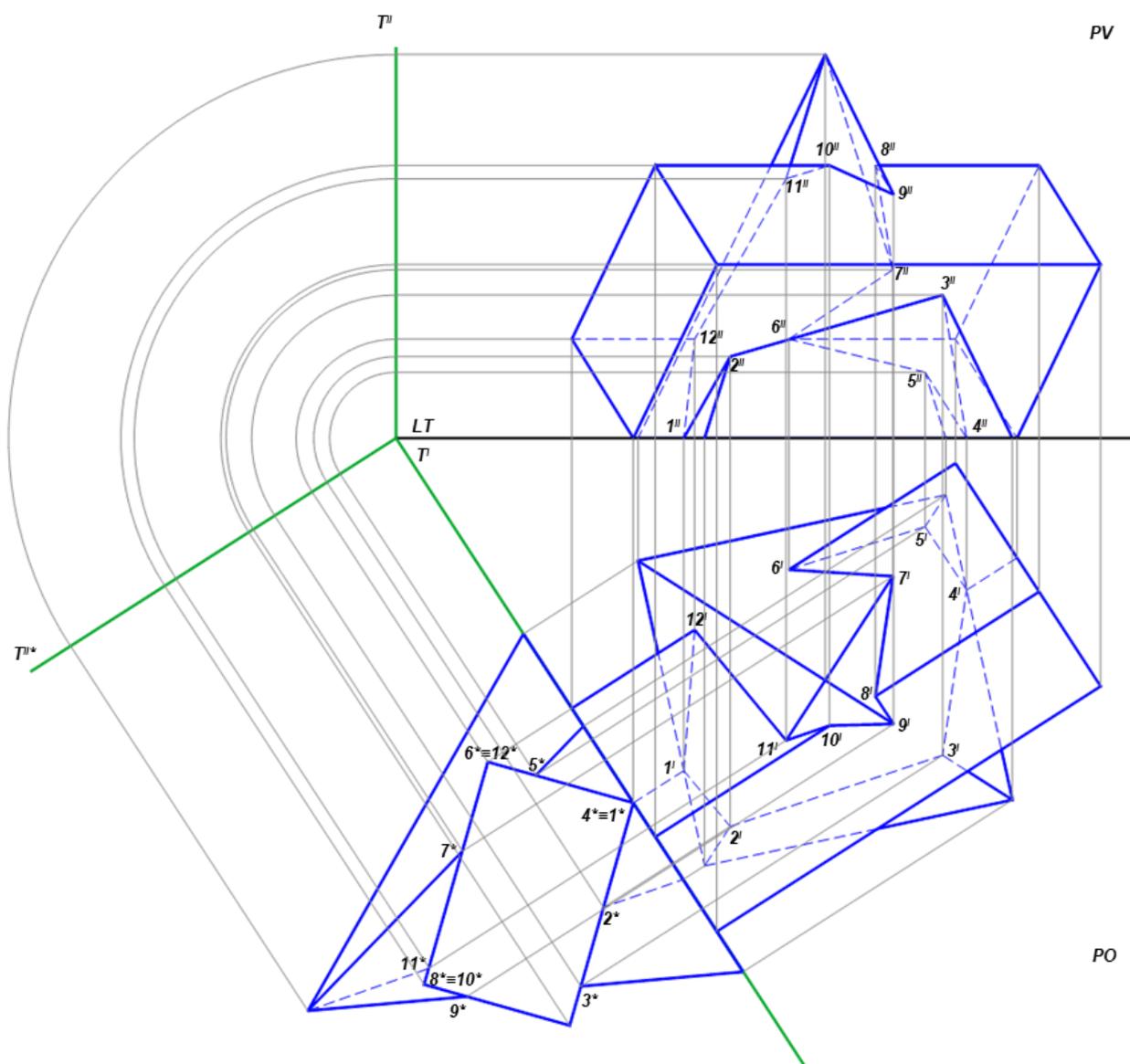
- 1. Due punti distinti appartengono ad una sola retta, tre punti non allineati ad un solo piano*
- 2. Per due punti passa una sola retta*
- 3. Tre punti non allineati appartengono ad un piano*
- 4. Una retta e un punto distinto da essa individuano un piano*
- 5. Una retta appartiene ad un piano se passa per due punti del piano*



Vista tridimensionale



Proiezioni ortogonali | Compenetrazione di solidi





Compenetrazione di una piramide e un parallelepipedo

1 – La piramide

Tracciare la base ABCD sul piano orizzontale. Tracciare la diagonale AC. Tracciare la diagonale BD, e determinare V^I nell'intersezione con AC. Proiettare i punti A, B, C e D sul piano verticale coincidenti con la linea di terra LT. Proiettare il vertice V^I sul PV. Unire il vertice V^{II} con i punti della base $A^I B^I C^I D^I$: $A^I V^{II}$, $B^I V^{II}$, $D^I V^{II}$, $C^I V^{II}$. Individuare e tracciare con segno tratteggiato lo spigolo nascosto $D^I V^{II}$.

2 – Il parallelepipedo

Tracciare sul Piano Orizzontale, con inclinazione generica, uno spigolo laterale del parallelepipedo, in modo che il suo punto medio coincida con V^I proiezione del vertice della piramide sul PO. Impostare un piano ausiliario coincidente con una delle due basi del parallelepipedo tracciando: T^I ortogonalmente alla direzione dello spigolo laterale, passante per un estremo. T^{II} ortogonalmente alla linea di terra. T^{II*} ortogonalmente alla T^I nella intersezione con la linea di terra. Tracciare la direzione della seconda base, parallela alla direzione della prima, in precedenza tracciata, passante per l'altro estremo dello spigolo del parallelepipedo, e ad esso ortogonale. Ribaltare genericamente la base del parallelepipedo sul piano ausiliario. Proiettare i punti della base, ortogonalmente alla T^I e determinare le proiezioni sul PO delle basi EFGI e LMNO. Proiettare i punti della base, ortogonalmente alla T^{II*} . Riportare con il compasso le proiezioni puntando nell'intersezione fra il piano ausiliario e la linea di terra. Proiettare le intersezioni dei raggi proiettanti, ortogonalmente alla T^{II} . Proiettare ortogonalmente alla LT le prime proiezioni della base EFGI. Individuare nelle intersezioni corrispondenti la seconda proiezione della base EFGI. Proiettare ortogonalmente alla LT le prime proiezioni della base LMNO. Individuare nelle intersezioni corrispondenti la seconda proiezione della base LMNO. Ripassare con linea tratteggiata le linee nascoste.

3 – Completamento del piano ausiliario

Proiettare la prima proiezione ABCD ortogonalmente alla T^I . Proiettare V^{II} ortogonalmente alla T^{II} . Ribaltare l'intersezione alla stessa distanza dalla LT. Proiettare V^{II} ortogonalmente alla T^{II*} . Determinare V^* proiettando V^I ortogonalmente alla T^I . Tracciare: $A^* V^*$, $D^* V^*$, $B^* V^*$, $C^* V^*$. Tratteggiare lo spigolo nascosto $B^* V^*$.

4 – Rappresentazione delle parti senza intersezioni

Ripassare le parti delle figure che in tutta evidenza non hanno intersezioni.

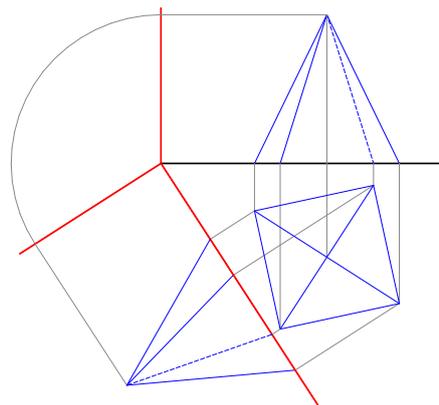
5 – Rappresentazione delle intersezioni

Proiettare dal piano ausiliario, sul PO e sul PV i punti: 9^* , 3^* , 11^* , 2^* , 7^* , 5^* . Determinare la sezione della piramide tracciando un piano ortogonale al PO passante per EL. Individuare e proiettare i punti di intersezione 12 e 6 punti di contatto fra il contorno della sezione e lo spigolo EL. Determinare la sezione della piramide tracciando un piano ortogonale al PO passante per FM. Individuare e proiettare i punti di intersezione 10 e 8 punti di contatto fra il contorno della sezione e lo spigolo FM.

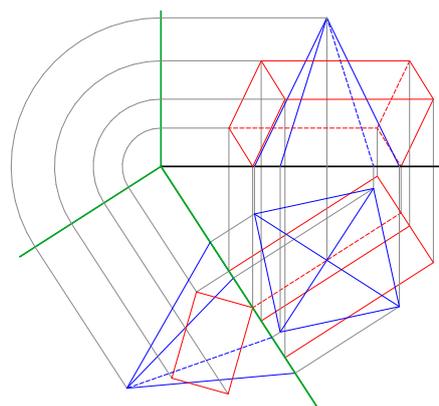
6 – Collegamento dei punti di intersezione

Unire sul PO e sul PV i punti di intersezione appartenenti allo stesso piano: 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9, 9-10, 10-11, 11-12, 12-1.

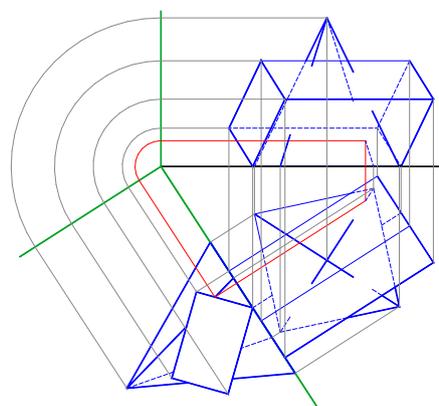
La compenetrazione di due o più solidi è la somma di volumi in una forma autonoma unica. Ogni compenetrazione è determinata da una linea detta di intersezione. Nel caso in oggetto, al fine di determinare i punti d'intersezione fra i due solidi, dopo avere rappresentato in doppia proiezione la piramide appoggiata sul piano orizzontale, impostare un piano ausiliario ortogonale al piano orizzontale che opportunamente si farà coincidere con una delle due basi del parallelepipedo. Proiettare quindi la piramide ortogonalmente alla prima traccia del piano ausiliario.



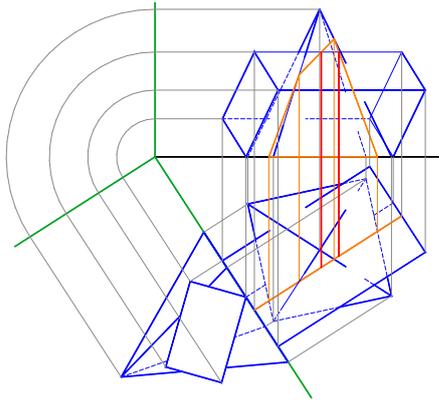
Rappresentare, sul piano orizzontale, la retta ortogonale alla prima traccia del piano ausiliario passante per la proiezione del vertice della piramide. Dopo avere rappresentato lo spigolo del parallelepipedo, disegnare a partire dall'estremo sulla prima traccia del piano ausiliario, la base rettangolare del parallelepipedo. Poiché i punti ruotano secondo piani ortogonali alla cerniera, proiettare i restanti tre punti della base rettangolare dal piano ausiliario verso il piano orizzontale. Essendo nota la lunghezza degli spigoli laterali del parallelepipedo, impostare parallelamente alla traccia del piano ausiliario la proiezione della seconda base del parallelepipedo posizionata, anch'essa come la prima, ortogonalmente rispetto al piano orizzontale. Le proiezioni mettono in evidenza le intersezioni di tre spigoli della piramide (BV, CV e DV) che intersecano il parallelepipedo e tre spigoli laterali del parallelepipedo (OI, EL e FM) che al contrario intersecano la piramide.



Al fine di determinare i punti di intersezione per poi successivamente unirli si applicheranno due diversi metodi. Il primo metodo, sfruttando la proiezione sul piano ausiliario della piramide e in particolare del parallelepipedo in posizione ortogonale rispetto al piano, permette di individuare in modo certo e immediato i punti di intersezione della piramide sul parallelepipedo. Infatti basterà proiettare sui piani orizzontale e verticale le intersezioni di questi spigoli sul piano ausiliario per individuarli in modo univoco e certo.



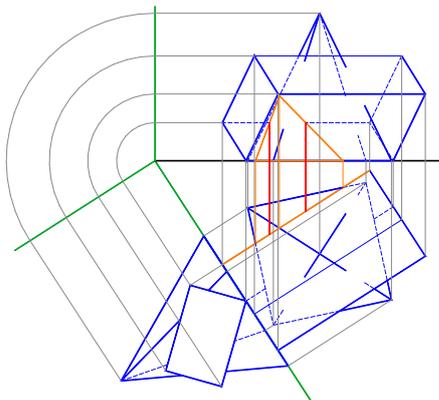
La proiezione ortogonale, compenetrazione di due o più solidi, è data dalla determinazione dei punti e delle linee di intersezione individuate dopo aver rappresentato i solidi elementari che lo costituiscono.



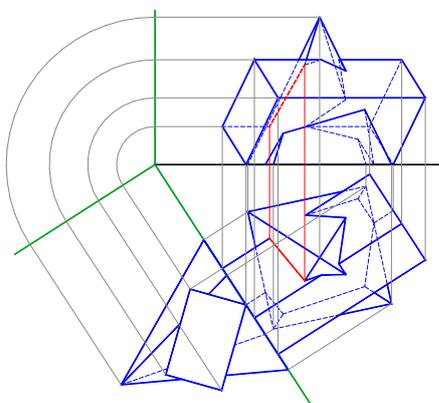
Il secondo metodo, sfrutta invece le proprietà delle sezioni e delle condizioni di appartenenza fra retta e piano già trattate precedentemente. Per determinare le intersezioni dello spigolo MF sulla piramide, realizziamo una sezione della piramide con un piano secante ortogonale al piano orizzontale e passante per MF. Poiché per costruzione MF è complanare con la sezione così determinata, i suoi punti di intersezione con il contorno della sezione saranno anche i punti di intersezione con la piramide.

Con le stesse modalità operative e in ragione delle stesse motivazioni, si procederà alla determinazione dell'intersezione dello spigolo LE del parallelepipedo sulla piramide.

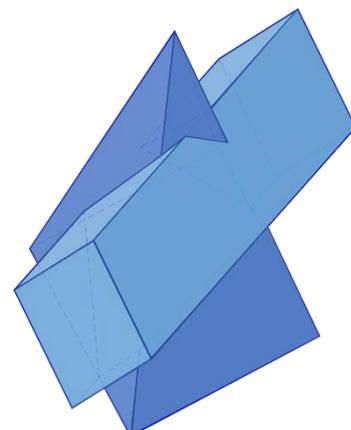
Un discorso a parte merita invece la rappresentazione delle intersezioni dello spigolo IO del parallelepipedo coincidente con il piano orizzontale, per i quali non si rende necessario determinare alcuna sezione, poiché appartenendo allo stesso piano della base della piramide, i punti di contatto si individuano in modo diretto e senza ulteriori passaggi intermedi, nelle intersezioni fra lo spigolo IO e i lati della base della piramide.



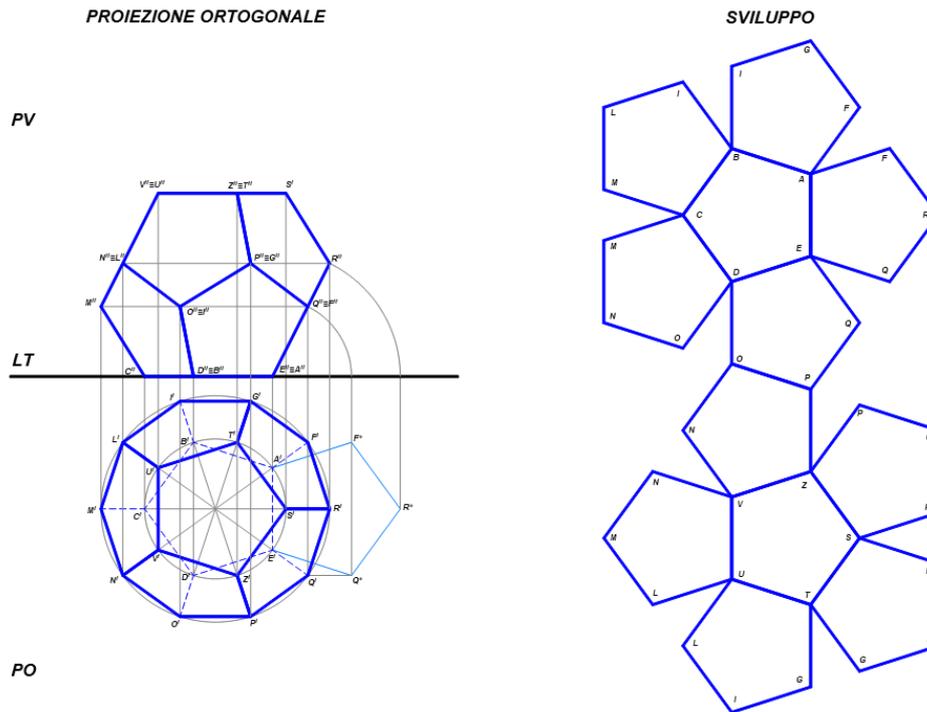
Una volta determinati tutti i singoli punti di intersezione, la rappresentazione si completa unendoli tenendo conto in particolare della contiguità e vicinanza e soprattutto dell'appartenenza al medesimo piano. Dal punto di vista grafico è opportuno ripassare con segno di linea continua le parti a vista e tratteggiare quelle nascoste, mentre è preferibile non rimarcare se non con segno di costruzione le parti interne dei solidi.



Vista tridimensionale



Proiezioni ortogonali | Sviluppo di solidi | Poliedri regolari



Dodecaedro – Proiezione e sviluppo

1 – Impostazione della proiezione

Impostare una doppia proiezione ortogonale, PO e PV, tracciando la linea di terra LT.

2 – Proiezione sul piano Orizzontale

Tracciare il pentagono regolare ABCDE. Ribaltare sul PO il pentagono AEQRF facendolo ruotare intorno al lato AE. Tracciare le direzioni che dal centro O del pentagono passano per i vertici ABCDE.

Tracciare le direzioni che dal centro O passano per i punti medi dei lati del pentagono ABCDE. Proiettare i punti ABCDE sulla linea di terra. Proiettare, ortogonalmente alla cerniera AE, il punto Q* e determinare Q¹ nell'intersezione con il raggio passante per E. Proiettare, Q¹ sul PV. Proiettare Q*F* sulla LT. Puntando il compasso su E¹≡A¹ ruotare e determinare Q¹F¹ sul raggio passante per Q¹. Tracciare la retta passante per E¹≡A¹ e Q¹F¹. Proiettare R* sulla LT.

Puntando il compasso su E¹≡A¹ ruotare e determinare R¹ sulla retta passante per E¹≡A¹ e Q¹F¹. Proiettare R¹ sul PO e determinare R¹. Tracciare il cerchio di centro O che circoscrive ABCDE. Tracciare il cerchio di centro O di raggio OQ¹ o OR¹. Individuare nell'intersezione fra il cerchio di raggio OA e le direzioni convergenti in O, i punti: STUVZ. Individuare nell'intersezione fra il cerchio di raggio OR e le direzioni convergenti in O: LMN - pentagono ULMNV; NOP - pentagono VNOPZ; PQR - pentagono ZPQRS; RFG - pentagono SRFGT; GIL - pentagono TGILU. Completamento degli spigoli nascosti: AF - BI - CM - DO - EQ. Completamento del contorno esterno a vista. Completamento delle parti interne.

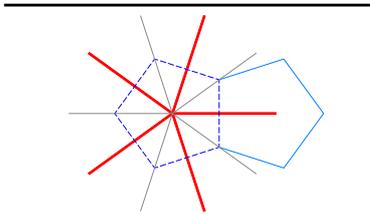
3 – Proiezione sul piano Verticale

Tracciare la direzione orizzontale passante per Q¹F¹. Tracciare il raggio proiettante per M¹ e individuare M¹. Tracciare C¹M¹. Proiettare OI sul PV. Tracciare OD. Tracciare la retta orizzontale passante per R¹. Proiettare NL sul PV. Tracciare la retta passante per M¹ e N¹≡L¹. Proiettare P≡G sul PV. Proiettare V≡U sul PV nell'intersezione con la retta passante per M-N≡L. Tracciare la retta orizzontale passante per V¹≡U¹. Proiettare S sul PV. Determinare Z¹≡T¹ sul PV.

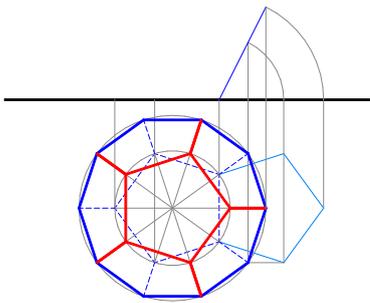
Tracciare lo spigolo PZ. Rappresentare a vista il contorno esterno della proiezione. Rappresentare a vista le parti interne della proiezione.

4 – Sviluppo

Ribaltare su un unico piano tutte le facce del solido: ABCDE; PONVZ; AEQRF; ZVUTS; AFGIB; UVNML; BILMC; TULIG; CMNOD; STGFR; EDOPQ; ZSRQP.

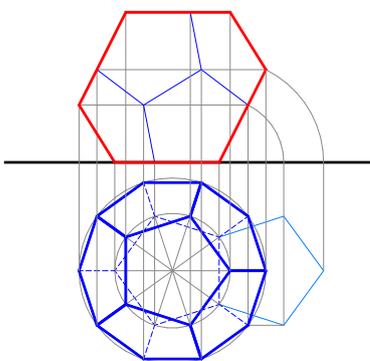


Il **dodecaedro**, quarto poliedro regolare convesso composto da 12 facce che sono pentagoni regolari, 20 vertici e 30 spigoli. Dopo avere rappresentato la base pentagonale inferiore del poliedro, riconoscibile poiché tratteggiata, tracciare le direzioni ortogonali ai lati e passanti per il vertice opposto. Ribaltare successivamente una faccia laterale intorno alla cerniera rappresentata dal lato in comune ai due pentagoni.

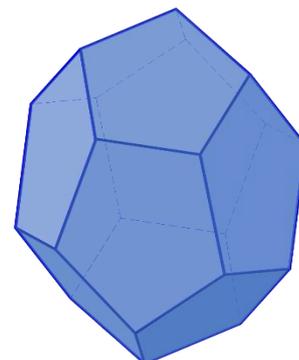


Dopo avere proiettato la base sul piano verticale, tenendo conto che i punti ruotano secondo piani ortogonali alla cerniera, determinare la proiezione degli spigoli nell'intersezione con i raggi passanti per gli estremi della base. Proiettare sul piano verticale il punto così ottenuto e tracciare la retta d'appartenenza della base pentagonale in vista di profilo sul piano verticale. Se consideriamo che gli estremi delle facce pentagonali sul piano orizzontale mantengono la medesima distanza dal centro, sarà sufficiente, al fine di determinarne la proiezione, individuare l'intersezione fra la circonferenza con centro nel baricentro del pentagono di base e raggio passante per la proiezione dello spigolo determinato sul piano orizzontale. Con la stessa procedura determineremo la proiezione della base pentagonale superiore, tracciando una circonferenza di raggio uguale alla distanza del baricentro del pentagono dagli estremi del pentagono della base inferiore, intersecata dalle direzioni ortogonali ai lati della base inferiore e il centro dello stesso pentagono.

Unire i punti tenendo conto delle facce nascoste sul piano orizzontale mentre la proiezione sul piano verticale non presenta, per effetto delle sovrapposizioni delle facce, parti del poliedro nascoste.



Vista tridimensionale



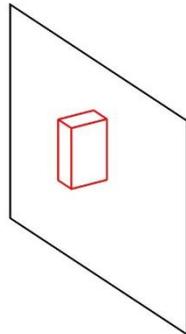
GLOSSARIO PER IMMAGINI

Terminologia essenziale

A

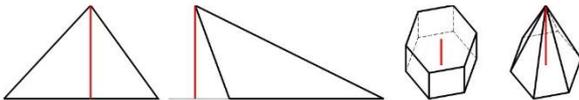
Aggetto

Elemento sporgente rispetto ad un piano verticale.
Distanza, misurata ortogonalmente dal piano verticale.



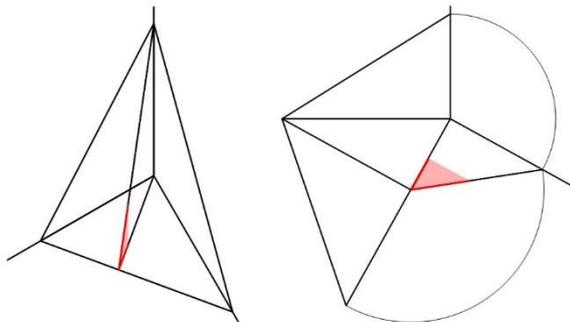
Altezza

In un triangolo è il segmento che unisce un vertice ortogonalmente al lato opposto o alla sua retta d'appartenenza. Le tre altezze del triangolo individuano l'ortocentro. In un prisma l'altezza è la distanza fra le due basi mentre in un solido con una base è la distanza della base dal vertice o dal punto più lontano rispetto al piano d'appartenenza della base.



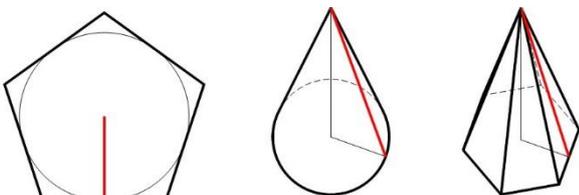
Angolo di massima pendenza

Dati due piani α e β , si considera l'angolo di massima pendenza quello formato dalle rette a e b, intersezioni di γ , piano perpendicolare a entrambi i piani dati.



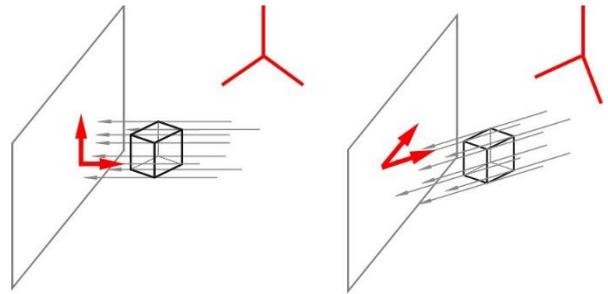
Apotema

In un poligono regolare è uguale al raggio del cerchio inscritto o la perpendicolare al lato con origine nel centro dello stesso poligono. In un cono è il segmento, coincidente con una generatrice, che unisce il vertice con un punto della circonferenza di base. In una piramide è il segmento ortogonale che unisce il vertice con un lato della base.



Assonometria

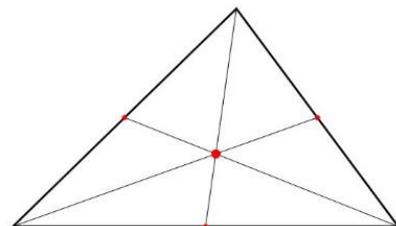
Metodo di rappresentazione grafica con l'osservatore ipotizzato a distanza infinita (Punto improprio di proiezione), raggi proiettanti fra loro paralleli e unità di misura costanti riportate sui tre assi (Da cui il nome) X, Y e Z. La posizione del piano di proiezione, detto quadro assonometrico, ortogonale rispetto ai raggi proiettanti e inclinato rispetto alla triade X, Y e Z determina le assonometrie ortogonali (Isometrica, Dimetrica e Trimetrica). La posizione del quadro assonometrico, inclinata rispetto ai raggi proiettanti determina le assonometrie oblique (Cavaliera, Cavaliera militare, Monometrica).



B

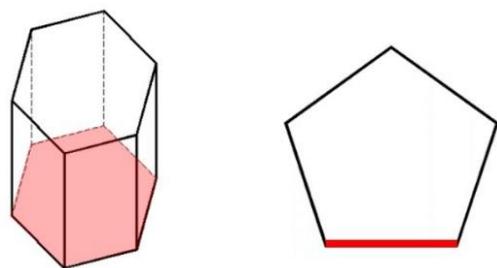
Baricentro

In un triangolo è detto baricentro il punto d'intersezione delle sue mediane, ovvero i segmenti che uniscono i vertici con i punti medi dei lati opposti. Il baricentro si trova sempre all'interno del perimetro del triangolo e divide ognuna delle tre mediane in due parti di cui quella contenente il vertice è doppia rispetto a quella contenente il punto medio del lato opposto.



Base

Lato di un poligono, o faccia di un solido. È consuetudine utilizzare il termine per indicare il lato o la faccia orizzontale inferiore, alludendo in questo modo al basamento su cui poggia la figura.



Antonio Cauli

DISEGNO

Teoria e Rappresentazione

SECONDA EDIZIONE

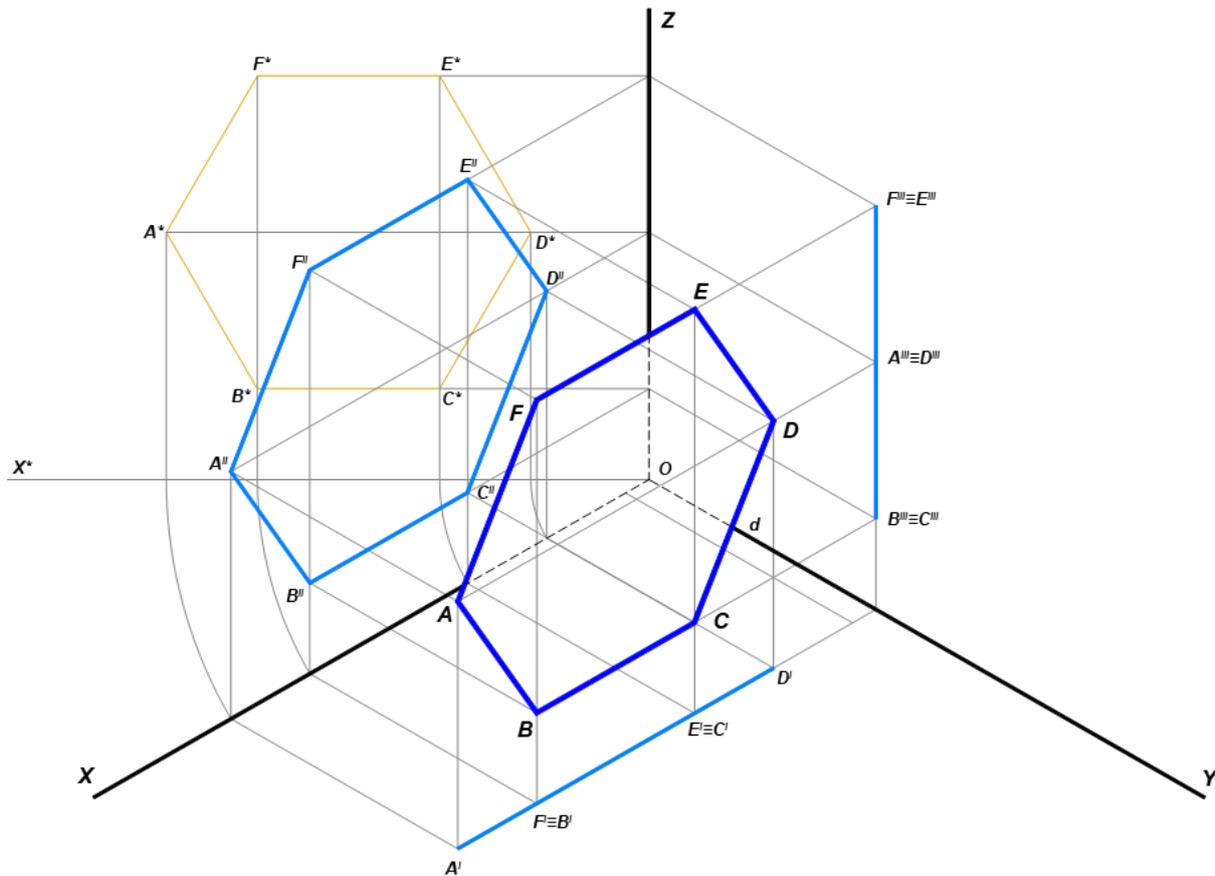
Volume 2

Assonometria

Prospettiva

Teoria delle ombre

(Secondo biennio e quinto anno)



Assonometria ortogonale isometrica metodo indiretto – esagono parallelo al piano XZ

1 – Impostazione degli assi

Tracciare l'asse verticale Z. A partire dall'origine O tracciare, inclinato di 120° rispetto a Z, l'asse X. A partire dall'origine O tracciare, inclinato di 120° rispetto a Z e X, l'asse Y.

2 – Impostazione del piano di proiezione X*Z

Ruotare il piano XZ intorno all'asse Z in modo da formare un angolo di 90° fra X* e Z. Rappresentare in vera forma e grandezza l'esagono ABCDEF.

3 – Proiezioni dell'esagono sui piani XY, XZ e YZ

Definire sull'asse Y, la distanza d dell'esagono rispetto al piano XZ. Tracciare su Y il raggio Z alla distanza d. Tracciare su Y alla distanza d dall'origine O il raggio X. Proiettare ortogonalmente sulla traccia X* i punti: A* F*≡B* E*≡C* D*. Proiettare ortogonalmente all'asse Z i punti: F*≡E* A*≡D* B*≡C*. Riportare centrato in O, le intersezioni dei raggi dalla traccia X* all'asse X. Tracciare dalle intersezioni dei raggi sull'asse Z i raggi con direzione X. Dalle intersezioni sull'asse X degli archi di riporto tracciare i raggi Z e individuare le proiezioni: A'', F'' - B'', E'' - C'', D''. Dalle intersezioni sull'asse X dei raggi con direzione Z tracciare i raggi Y e individuare le proiezioni: A', D', F'≡B', E'≡C'. Dalle intersezioni sull'asse Z dei raggi con direzione X tracciare i raggi Y e individuare le proiezioni: F''≡E'', B''≡C'', A''≡D''.

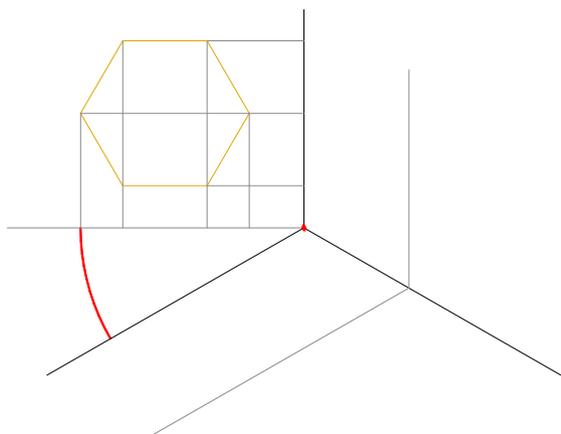
4 – Proiezione assonometrica

Tracciare i

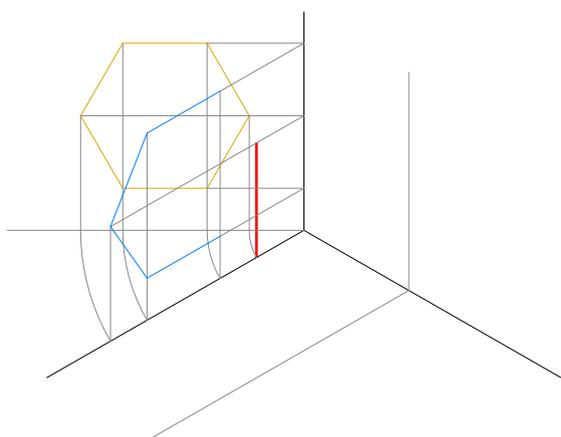
raggi proiettanti con direzioni X, Y e Z dalle proiezioni sui piani XY, XZ e YZ, e individuare i vertici dell'esagono in assonometria: A – B – C – D – E – F. Ripassare con segno di linea continua, la proiezione assonometrica, le proiezioni sui piani assonometrici, le parti a vista degli assi X,Y e Z.

5 – Completamento grafico

Ripassare con segno di linea continua a vista la proiezione assonometrica e le proiezioni sui piani XY, XZ e YZ. Ripassare degli assi X, Y e Z con segno di linea continua le parti a vista e con linea tratteggiata le parti nascoste.

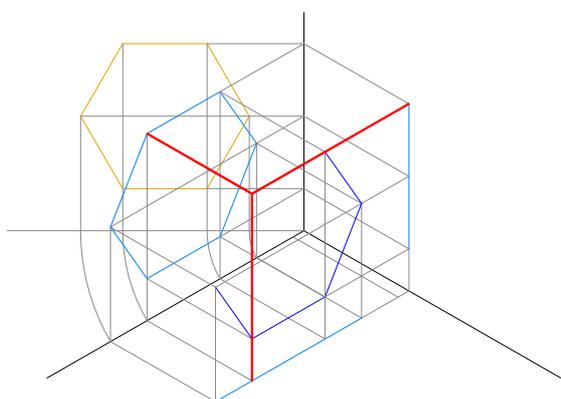


Impostate le direzioni degli assi nell'assonometria ortogonale isometrica, ribaltiamo il piano XZ ipotizzando il ribaltamento intorno all'asse Z in modo tale da poter rappresentare in vera forma e grandezza l'esagono in seconda proiezione.

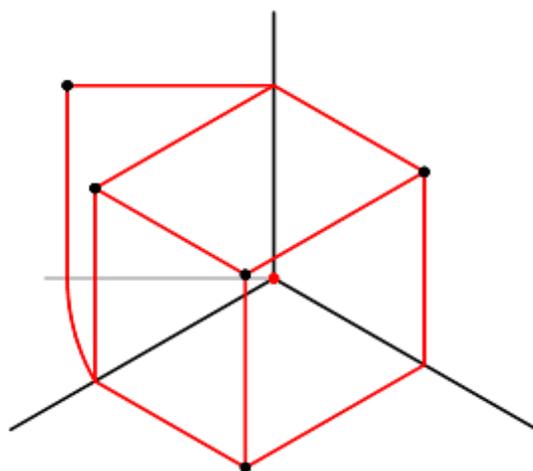


Dopo aver rappresentato la proiezione sul ribaltamento del piano verticale intorno all'asse Z si procede riportando alla stessa distanza dalla cerniera le proiezioni dall'asse ribaltato X*. Infatti poiché come più volte ricordato i punti del piano di ribaltamento ruotano secondo piani ortogonali alla cerniera, sarà sufficiente riportare con il compasso dall'origine dei piani, l'intersezione dei raggi sull'asse X* con l'asse X. Per quanto riguarda le altezze dei punti, queste saranno riportate direttamente dall'asse Z poiché i punti della cerniera si considerano fissi. Come in altri casi dopo aver riportato sui piani assonometrici le tre proiezioni dell'esagono si procederà alla determinazione dell'assonometria.

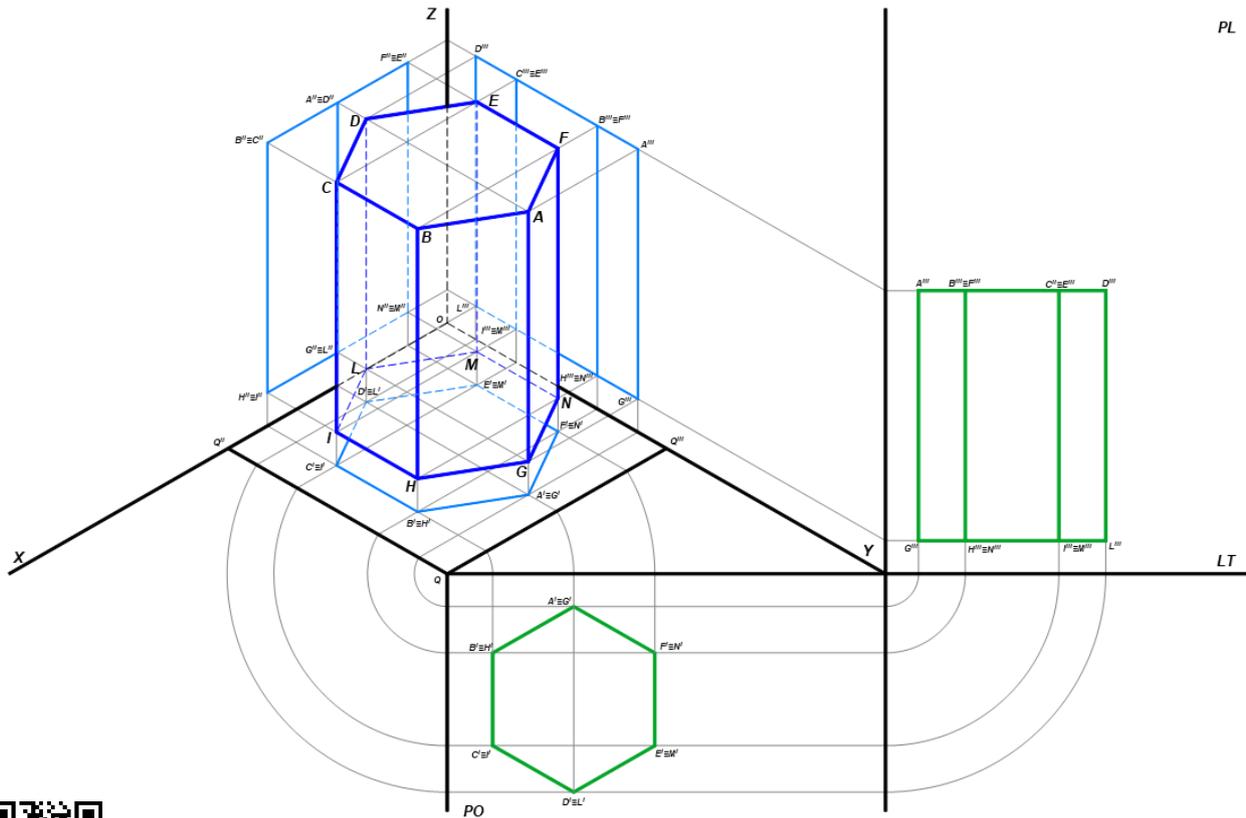
La proiezione assonometrica si otterrà determinando innanzitutto i sei punti dell'esagono nell'intersezione dei raggi proiettanti X, Y e Z passanti per le proiezioni dei punti in prima, seconda e terza proiezione (piani assonometrici XY, XZ e YZ) e successivamente unendo i punti consecutivamente.



Schema delle proiezioni



Assonometria ortogonale | Solidi



Assonometria ortogonale isometrica metodo indiretto: prisma a base esagonale

1 – Impostazione degli assi

Tracciare l'asse verticale Z con origine nel punto O. Tracciare, a partire dall'origine O, l'asse X inclinato di 120° rispetto a Z. Tracciare, a partire dall'origine O, l'asse Y inclinato di 120° rispetto a Z.

2 – Impostazione dei piani orizzontale e laterale

Impostare, la linea di terra LT passante per l'estremo dell'asse Y. Rappresentare la traccia del piano laterale passante per l'intersezione della LT con Y. Delimitare il PO tracciando la verticale passante per Q. Proiettare con direzione X il punto Q sul piano YZ. Proiettare con direzione Y il punto Q sul piano XZ.

3 – Proiezione ortogonale del prisma

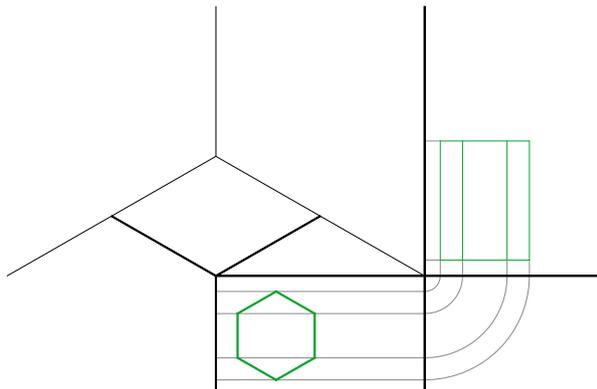
Rappresentare in prima proiezione il prisma con la base parallela al PO. Proiettare ortogonalmente al PL i punti della prima proiezione: $A' \equiv G^1 - B' \equiv H^1 - F' \equiv N^1 - C' \equiv I^1 - E' \equiv M^1 - D' \equiv L^1 \dots$ e riportare sulla LT. Tracciare il raggio proiettante alla quota della base inferiore. Tracciare il raggio proiettante alla quota della base superiore. Tracciare sul PL, dalle intersezioni sulla LT, i raggi verticali e individuare all'altezza delle basi i punti: $D''' - L''' - A''' - G''' - B''' \equiv F''' - H''' \equiv N''' - C''' \equiv E''' - I''' \equiv M'''$.

4 – Proiezione del prisma sui piani XY, XZ e YZ

Riportare, dal PO sulla traccia QQ'' facendo centro sul punto Q, le proiezioni dei punti: $A' \equiv G^1 - B' \equiv H^1 - F' \equiv N^1 - C' \equiv I^1 - E' \equiv M^1 - D' \equiv L^1$. Proiettare le intersezioni su QQ'' sul piano YZ, con direzione X: $A' \equiv G^1 - B' \equiv H^1 - F' \equiv N^1 - C' \equiv I^1 - E' \equiv M^1 - D' \equiv L^1$. Proiettare la prima proiezione del prisma ortogonalmente alla LT: $C' \equiv I^1 - B' \equiv H^1 - D' \equiv L^1 - A' \equiv G^1 - E' \equiv M^1 - F' \equiv N^1$. Riportare, dal PO sulla traccia QQ''' facendo centro sul punto Q, le proiezioni dei punti: $C' \equiv I^1 - B' \equiv H^1 - D' \equiv L^1 - A' \equiv G^1 - E' \equiv M^1 - F' \equiv N^1$. Proiettare le intersezioni su QQ''' sul piano XZ, con direzione Y e determinare sul piano XY le proiezioni: $C' \equiv I^1 - B' \equiv H^1 - D' \equiv L^1 - A' \equiv G^1 - E' \equiv M^1 - F' \equiv N^1$. Dall'intersezione delle quote delle basi sul PL tracciare i raggi con direzione Y. Dall'intersezione dei raggi sull'asse Y tracciare i raggi con direzione Z e individuare: $A''' - G''' - D''' - L''' - B''' \equiv F''' - H''' \equiv N''' - C''' \equiv E''' - I''' \equiv M'''$. Dall'intersezione delle quote delle basi sull'asse Z tracciare i raggi con direzione X. Dall'intersezione dei raggi sull'asse X tracciare i raggi con direzione Z e individuare: $B''' \equiv C''' - H''' \equiv I''' - F''' \equiv E''' - N''' \equiv M''' - A''' \equiv D''' - G''' \equiv L'''$.

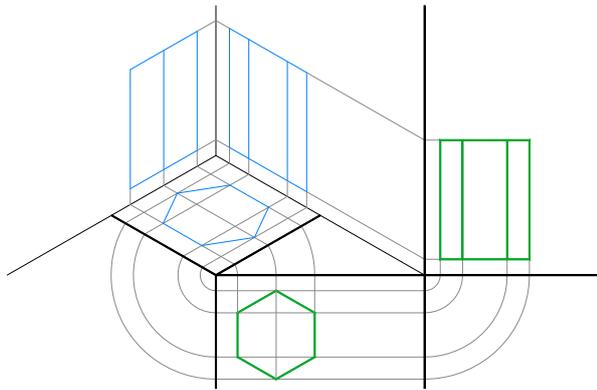
5 – Proiezione assonometrica del prisma

Tracciare i raggi proiettanti con direzioni X, Y e Z dalle proiezioni sui piani XY, XZ e YZ, e individuare i vertici del prisma in assonometria: A – B – C – D – E – F – G – H – I – L – M – N.

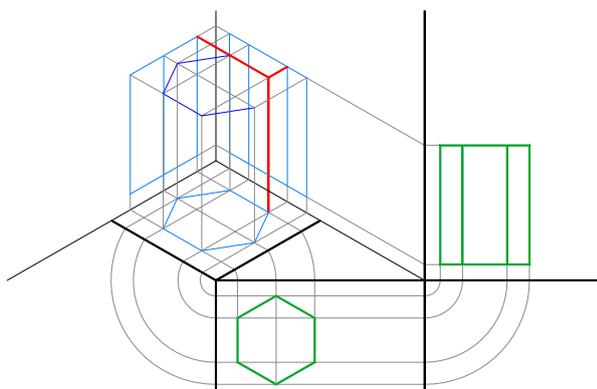


In questo esempio dopo avere impostato le direzioni degli assi nell'assonometria ortogonale isometrica, i impostiamo un ribaltamento del piano XY in modo tale da poter rappresentare oggettivamente in prima proiezione l'oggetto.

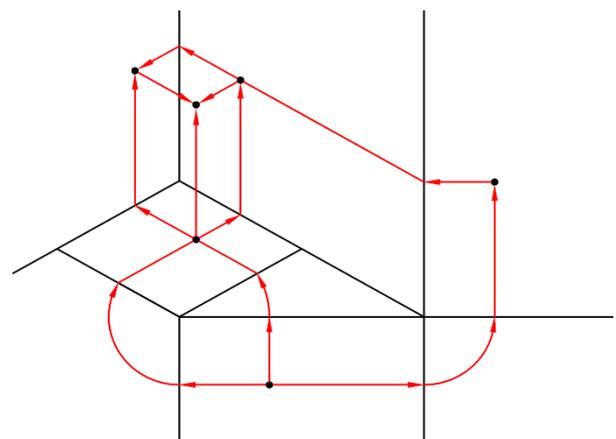
Procediamo quindi alla proiezione sul ribaltamento del piano laterale intorno alla linea di terra. È il caso di sottolineare che le distanze sull'asse Z verranno riportate dall'origine dei piani tenendo conto che i punti ruotano mantenendo la stessa distanza dalla cerniera. In questo modo saranno riportati sugli assi i dati della proiezione ortogonale sul piano orizzontale. Ricostruiamo la proiezione sul piano assonometrico XY riportando la misura oggettiva dalla proiezione ortogonale e proiettando i punti con la direzione degli assi.



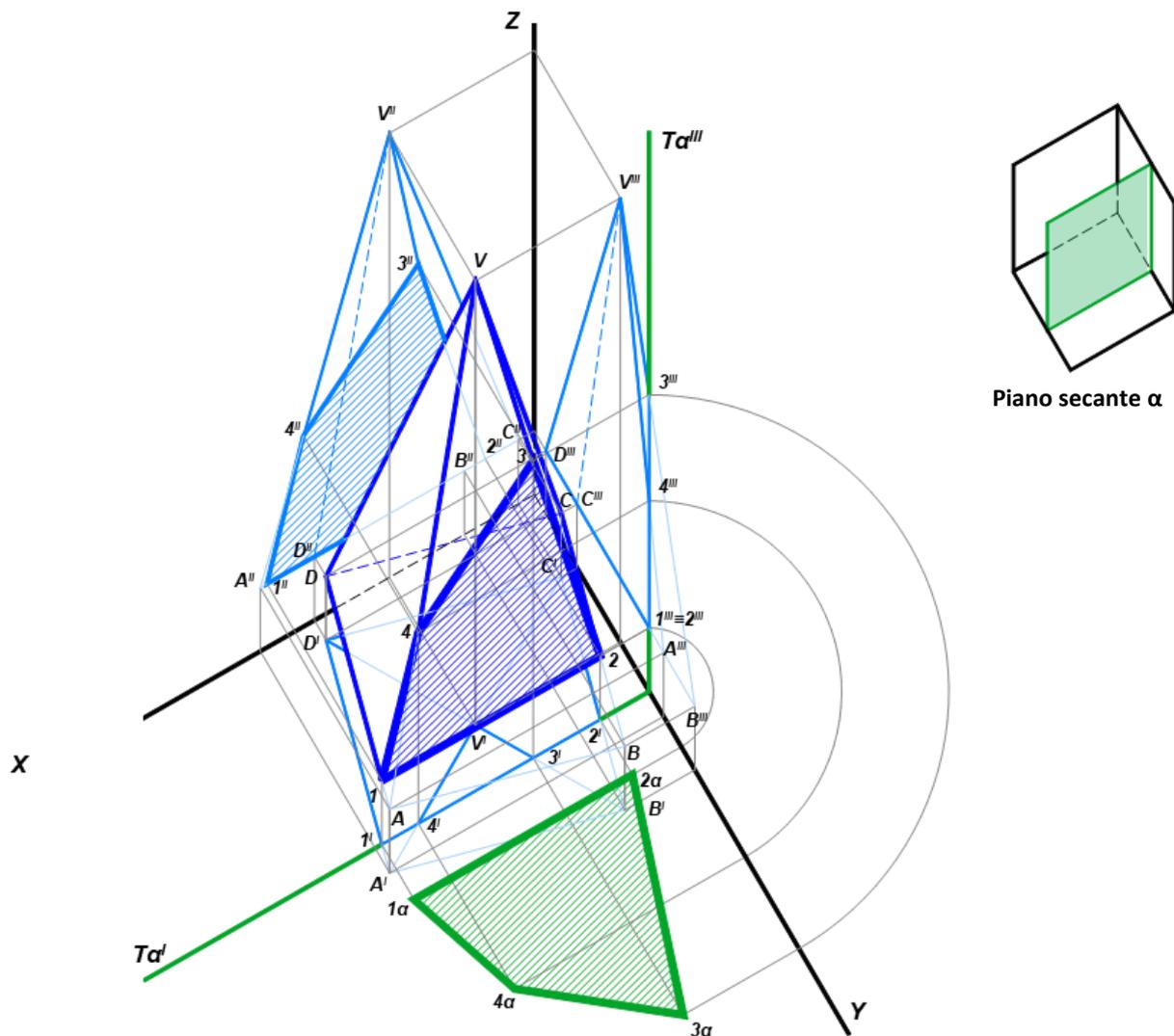
Discorso analogo per quanto riguarda il riporto sul piano YZ, delle altezze del solido. Riportare sulla Tz, alla stessa distanza dalla cerniera, le quote del solido proiettate sulla Tz* e successivamente proiettarle con direzione Y sul piano YZ. Proiettare in seguito con raggi proiettanti aventi direzione X e trovare i punti dell'assonometria nelle intersezioni con i raggi Z passanti per la proiezione sul piano XY.



Schema delle proiezioni



Assonometria | Sezioni



Sezione assonometrica di una piramide a base quadrata con piano secante parallelo a XZ

1 – Prima fase

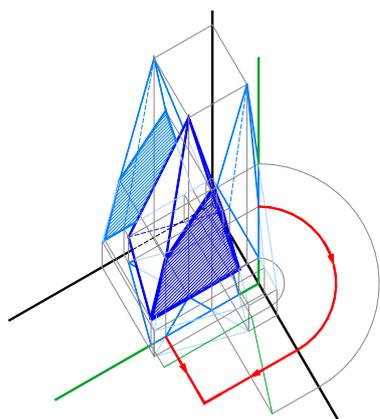
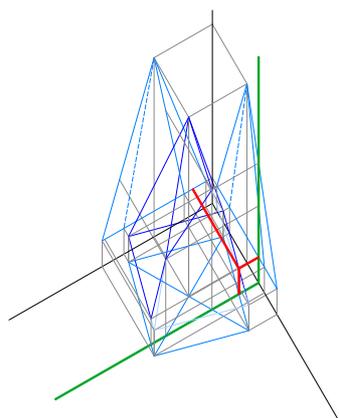
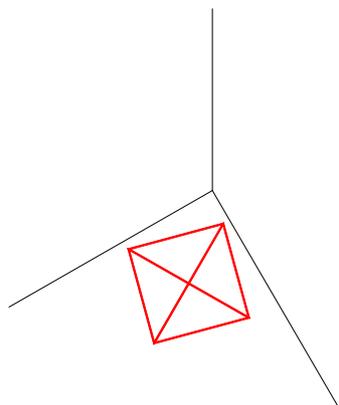
Procedere all'impostazione degli assi, proiezione sui piani (XY, XZ e YZ), e assonometria della piramide in modo del tutto analogo all'esercizio precedente "Sezione assonometrica di una piramide a base quadrata con piano secante orizzontale"

2 – La sezione assonometrica

Impostare il piano di sezione α parallelo a XZ: Tracciare la $T\alpha^I$ e la $T\alpha^{III}$. Individuare e proiettare i punti di sezione: 1 su AD; 4 su AV; 3 su BV; 2 su BC. Determinare la sezione assonometrica unendo i punti 1-2-3-4. Evidenziare con linea continua di spessore doppio il contorno della sezione. Campire la superficie di sezione con tratteggio inclinato di 45° .

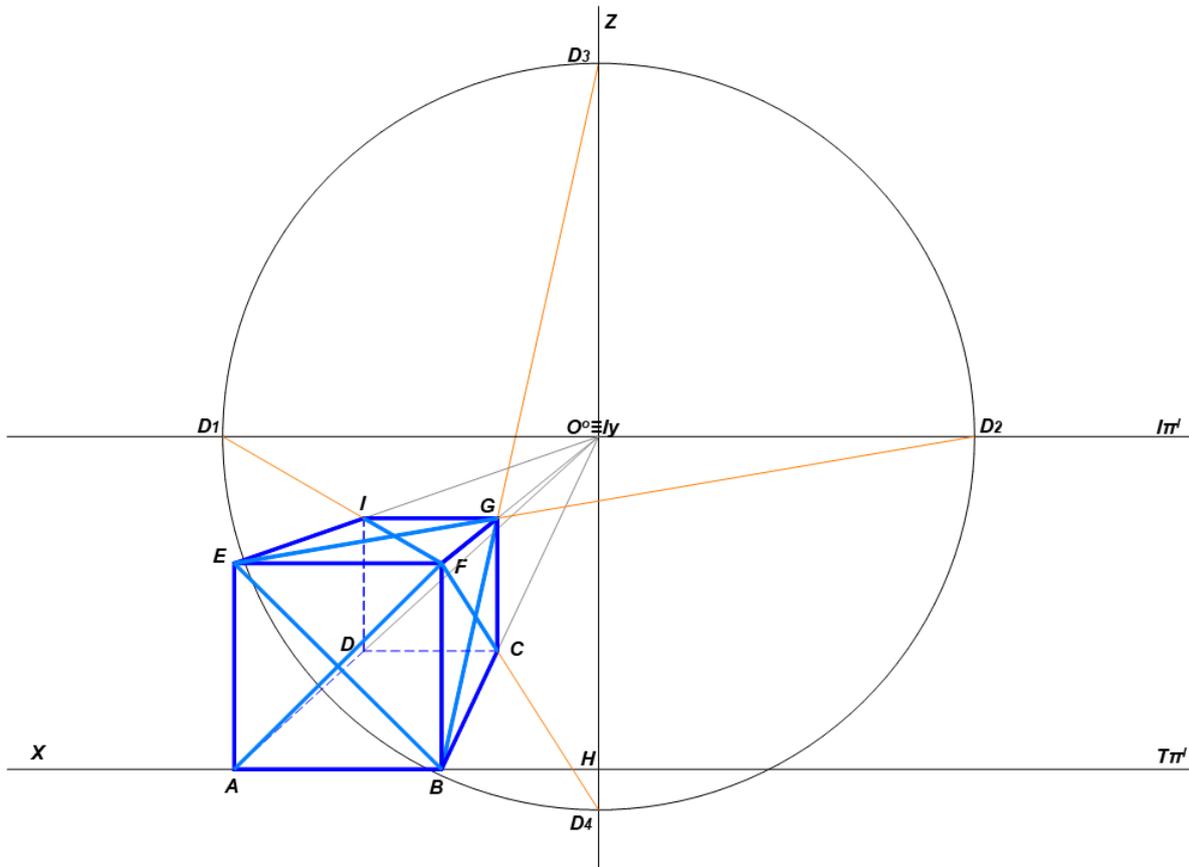
3 – Determinazione della sezione oggettiva (Vera forma)

Determinare la sezione in vera forma, ribaltando sul piano oggettivo XY i punti 1, 2, 3 e 4 secondo le direzioni esemplificate nello schema proiettivo: 1 – 2 – 3 – 4. Ripassare con spessore doppio rispetto alle parti a vista il contorno 1-2-3-4. Campire con tratteggio inclinato la superficie di sezione.



Determinare, dopo averne realizzato la proiezione assonometrica, una sezione della piramide con un piano secante verticale parallelo al piano assonometrico XZ. Impostare una assonometria cav aliera militare monometrica disponendo gli assi X, Y e Z con angolazione XY 90°, XZ 120°, YZ 150° e rappresentare una piramide a base quadrata parallela al piano XY, genericamente ruotata rispetto agli altri due piani XZ e YZ. Dopo avere proiettato il solido sui piani XZ e YZ, determinare l'assonometria della piramide rappresentando, con segno di costruzione sia le parti a vista che quelle nascoste. Impostare il piano secante verticale che avrà le tracce sui piani XY e YZ rispettivamente parallele agli assi X e Z. Il piano che interseca il solo asse Y, seziona il solido dividendolo in due parti, anteriore e posteriore. Non consideriamo la parte anteriore e rappresentiamo la parte posteriore "sezionata" del solido. La proiezione sul piano YZ ci permette di determinare con univocità i punti di intersezione fra il piano secante e la piramide. Partendo da questi punti determinare le proiezioni della piramide sezionata sui piani XY, XZ e YZ. Determinare successivamente i punti di sezione sull'assonometria proiettando con direzione X, Y e Z i corrispondenti punti sui tre piani assonometrici. Completare la rappresentazione grafica del contorno della sezione con spessore pari al doppio rispetto alle parti a vista mentre la superficie di sezione sarà "campita", come di consueto, con un tratteggio inclinato rispetto alla forma della sezione. L'immagine della sezione così ottenuta, presenta delle deformazioni derivanti dalla deformazione angolare del piano XZ. Per ottenere la sezione in vera forma e grandezza dovremmo ribaltare il piano di sezione, sull'unico piano dell'assonometria non interessato da deformazioni angolari ovvero il piano XY. Proiettando i raggi dai punti della sezione sul piano XY, ribaltando le quote Z dei punti dalla traccia del piano secante sul piano YZ e proiettando in seguito ortogonalmente all'asse Y, nell'intersezione si determina la sezione oggettiva in vera forma e grandezza.

I disegni di rilievo o di progetto, sono sempre eseguiti con il metodo delle proiezioni ortogonali poiché realizzati, nelle parti fondamentali, in condizioni di parallelismo con i piani di proiezione e mantengono, secondo la scala metrica di riferimento, le dimensioni oggettive.



Metodo dei punti di distanza: cubo

1 – Impostazione della prospettiva

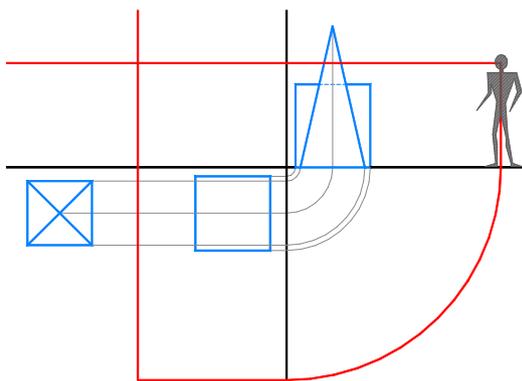
Tracciare la $l\pi^l$ (linea d'orizzonte). Tracciare la $T\pi^l$ (linea delle tracce) parallela alla $l\pi^l$. Tracciare il piano meridiano principale individuando H su $T\pi^l$ e O° su $l\pi^l$. Tracciare la circonferenza di centro O° e individuare D_1 e D_2 su $l\pi^l$ e D_3 e D_4 sul piano meridiano principale. O° coincidente con $l\gamma$; X coincidente con $T\pi^l$; Z coincidente con il piano meridiano principale.

2 – Proiezione della base

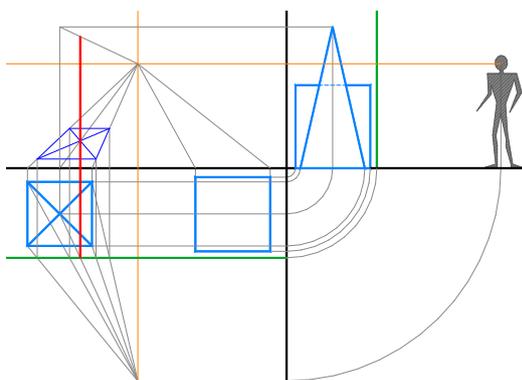
Individuare sulla linea delle tracce AB, misura oggettiva del lato del cubo. Tracciare il raggio Y passante per A. Tracciare il raggio Y passante per B. Tracciare il raggio D_2 passante per A ($AB = BC$). Tracciare il raggio D_1 passante per B. Tracciare la direzione X unendo D e C. Evidenziare AD. Evidenziare BC.

3 – Impostazione del solido

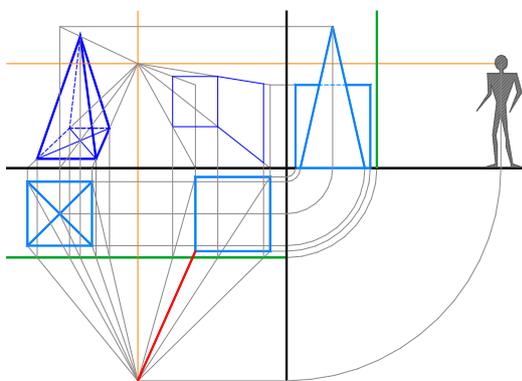
Tracciare il raggio Z a partire da: A, B, C e D. Individuare gli spigoli del cubo: AE, EF ed FB. Tracciare Y passante per E, Y passante per F, e determinare IG sulle Z passanti per D e C. Individuare e rappresentare le parti a vista e nascoste del cubo.



Immaginiamo di rappresentare una proiezione ortogonale in cui andremo ad inserire sul piano orizzontale e sul piano laterale i solidi, una piramide a base quadrata e un cubo in posizione frontale, ovvero con le facce principali parallele alla linea di terra. Inseriremo anche l'osservatore individuando in particolare la sua altezza sul piano laterale e la direzione del raggio principale. Utilizziamo il piano normalmente preposto alla proiezione sul piano verticale per rappresentare il quadro prospettico. La direzione del raggio principale proiettato dal piano laterale e dal piano orizzontale determina nell'intersezione sul quadro prospettico il punto principale O° .

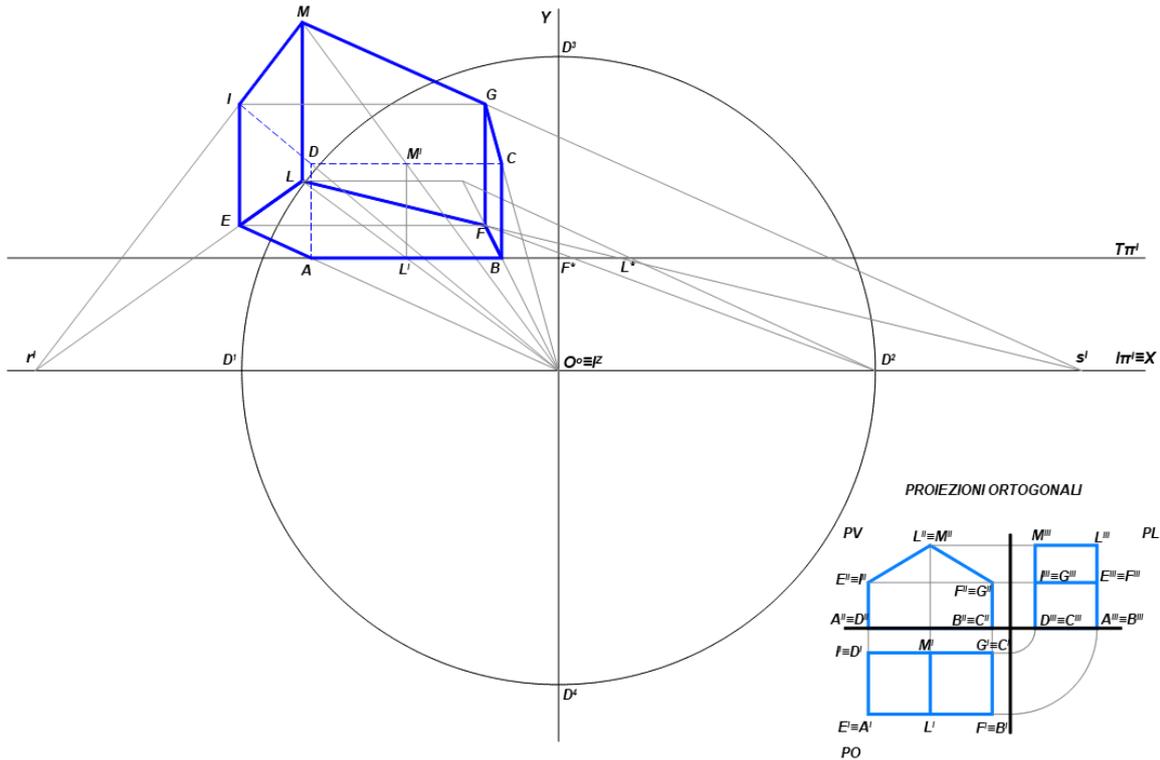


Impostiamo la posizione del quadro disponendolo in posizione ortogonale rispetto al piano orizzontale e parallela rispetto alla direzione X coincidente con la linea di terra. Prolunghiamo le rette d'appartenenza delle direzioni Y fino ad intercettare la linea di terra. Il punto principale O° , oltre ad essere centro del cerchio delle distanze, è anche fuga delle direzioni Y ortogonali al quadro. In considerazione di questo fatto possiamo unire, sul quadro prospettico, le intersezioni Y sulla linea di terra con la fuga delle Y, coincidente con O° . Possiamo a questo punto proiettare sul piano orizzontale, i raggi passanti per i punti dei solidi e determinare le intersezioni sulla prima traccia del quadro. Per individuare i punti sul quadro prospettico sarà sufficiente proiettare, ortogonalmente alla linea di terra, le intersezioni dei raggi sul quadro nelle corrispondenti direzioni Y.



Il metodo indiretto del taglio dei raggi visuali permette, attraverso la rappresentazione simultanea, oltre che della prospettiva anche delle proiezioni ortogonali, di comprendere più efficacemente le condizioni proiettive che concorrono alla determinazione dell'immagine prospettica. Si ritiene utile al fine di identificare senza ambiguità i diversi metodi proiettivi, rappresentare le proiezioni ortogonali e la proiezione prospettica, diversificandone il segno grafico, per grossezza di linea o per colore.

Prospettiva | Quadro Orizzontale



Solido composto: fughe di rette inclinate

1 – Impostazione della prospettiva

Tracciare la $\Pi^1 \equiv X$. Tracciare la direzione ortogonale Y e individuare $O^\circ \equiv Iz$ su Π^1 . Tracciare il cerchio delle distanze e individuare i punti D1 e D2 su Π^1 ; D3 e D4 su Y.

2 – Proiezione prospettica della base inferiore

Rappresentare parallelamente alla $\Pi^1 \equiv X$ la linea delle tracce $T\pi^1$. Rappresentare la base ABCD del solido avendo cura di far coincidere AB con $T\pi^1$. Riportare sulla proiezione prospettica L^1-M^1 . Tracciare con direzione Z i raggi passanti per: A-B-C-D.

3 – Proiezione prospettica delle falde inclinate

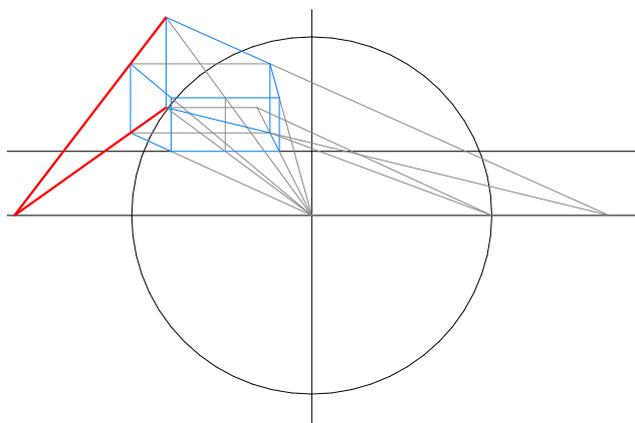
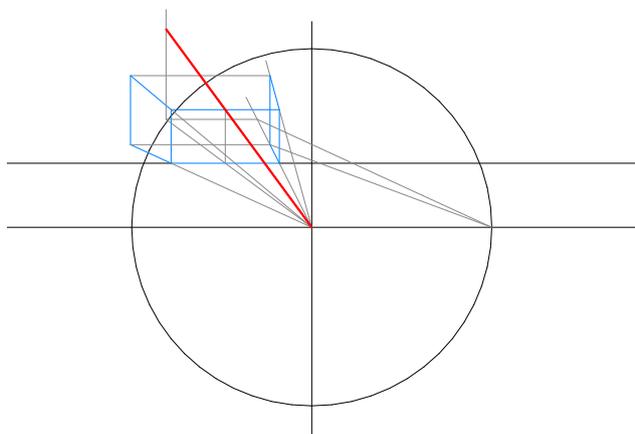
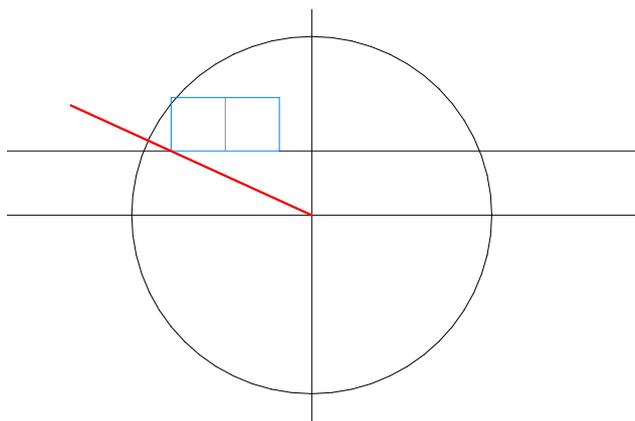
Riportare la misura oggettiva BF^* sulla $T\pi^1$.

Tracciare:

- il raggio D^2 passante per F^* e determinare F sul raggio Z passante per B e il raggio Y passante per F e determinare G sul raggio Z passante per C.
- il raggio X passante per G e determinare I sul raggio Z passante per D, successivamente il raggio Y passante per I e determinare E sul raggio Z passante per A. Riportare la misura oggettiva F^*-L^* sulla $T\pi^1$.
- il raggio D^2 passante per L^* e determinare l'intersezione sul raggio Z passante per B e successivamente tracciare il raggio X. Determinare il punto L nell'intersezione con il raggio Z passante per L^1 .
- il raggio Y passante per L e determinare M sul raggio Z passante per M^1 .
- la retta passante per FL e determinare la fuga s^1 sulla Π^1 .
- la retta s^1 passante per GM (parallelo a FL), la retta passante per EL e determinare la fuga r^1 sulla Π^1 .
- la retta r^1 passante per IM (parallelo a EL).

4 – Rappresentazione

Tracciare con segno a vista il contorno della proiezione prospettica e le parti a vista interne al contorno del solido. Tracciare le parti nascoste del solido.



Il solido di cui dobbiamo realizzare la proiezione prospettica a quadro orizzontale è costituito da due falde inclinate, composte da una direzione Y e da una direzione inclinata rispetto al quadro. Dopo avere rappresentato la proiezione in vera forma e grandezza sul quadro, riprendendo esattamente quanto avremmo fatto per proiettarla in proiezione ortogonale sul piano orizzontale, tracciamo in corrispondenza di uno spigolo esterno un raggio di direzione Z su cui riportare, utilizzando i punti D1 e D2, fuga di rette inclinate di 45° rispetto alle direzioni Z, le altezze della parte inferiore dei due piani inclinati. Allo stesso modo, procedendo quindi per determinazione di punti tracciamo, al fine di misurare la quota Z, due raggi di direzione Z passanti per le proiezioni sul quadro della parte superiore del piano inclinato. Una volta realizzata l'immagine prospettica del solido determiniamo, prolungando i lati inclinati delle falde, le fughe corrispondenti che si troveranno sulla giacitura con direzione X passante il punto principale O° a sua volta coincidente con la fuga delle direzioni Z.

Gli elementi di riferimento della prospettiva sono:

Quadro, piano π è il piano, verticale, orizzontale o inclinato, in cui si determina l'immagine;

Geometricale, piano π' , corrisponde al piano orizzontale delle proiezioni ortogonali;

Piano meridiano principale, piano β ortogonale al quadro passante per il punto di vista S, ;

Linea di terra, la retta di intersezione fra quadro e geometricale;

Linea di orizzonte, retta parallela alla linea di terra passante per O° , si genera nell'intersezione con il quadro di un piano parallelo al geometricale passante per S;

Punto principale, O° proiezione ortogonale del centro di proiezione S sul quadro;

Distanza principale, la distanza S- O° , rappresenta la distanza minore che intercorre fra il centro di proiezione (osservatore) e il quadro;

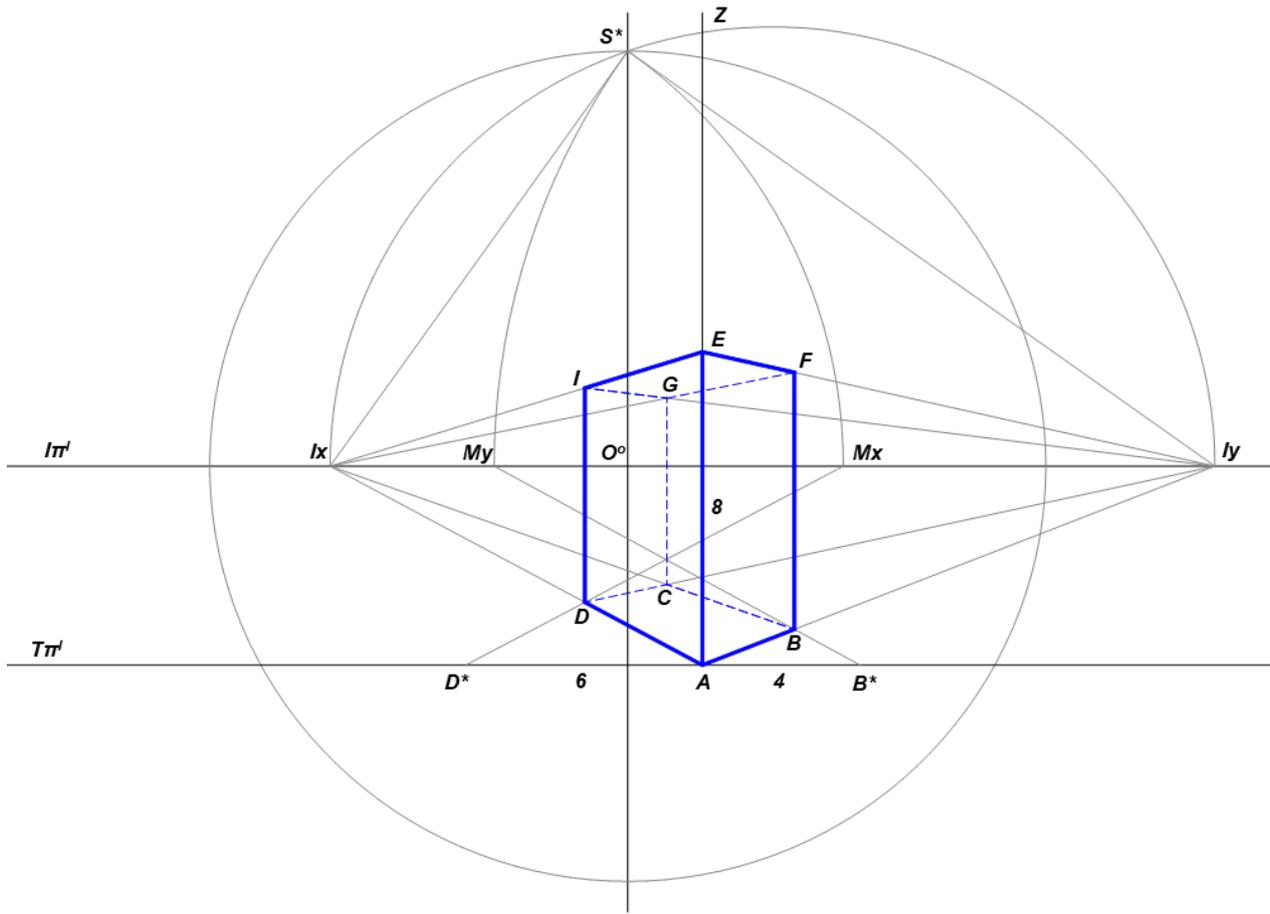
H, intersezione del piano meridiano principale con la linea di terra;

Altezza del punto di vista, H- O° ;

Cerchio delle distanze, con centro in O° e raggio pari alla distanza principale;

Punti di distanza, i due punti di intersezione della linea di orizzonte con il cerchio delle distanze, fughe di rette orizzontali inclinate di 45° rispetto al quadro.

Prospettiva | Quadro Verticale Accidentale



Metodo dei punti di misura: parallelepipedo appoggiato al geometrale

1 – Impostazione della prospettiva

Disegnare la $T\pi^1$ (Linea delle tracce). Disegnare la $l\pi^1$ (linea d'orizzonte). Scorcio prospettico: fissare a piacere A sulla $T\pi^1$ e unire con l_x e l_y . Tracciare la direzione Z a piacere e fissare la posizione di O° su $l\pi^1$. Tracciare la semicirconferenza di diametro l_x-l_y . Tracciare il rettangolo $l_x-l_y-S^*$. Puntando su O° tracciare il cerchio delle distanze di raggio $O^\circ-S^*$. Puntare su l_x con apertura l_x-S^* , tracciare un arco e individuare M_x su $l\pi^1$. Puntare su l_y con apertura l_y-S^* , tracciare un arco e individuare M_y su $l\pi^1$.

2 – Proiezione della base inferiore del solido

Riportare su $T\pi^1$ il segmento $A-D^*$ di misura 6. Unire D^* con M_x e individuare D su $A-l_x$. Riportare su $T\pi^1$ il segmento $A-B^*$ di misura 4. Unire B^* con M_y e individuare B su $A-l_y$. Unire D con l_y . Unire B con l_x e individuare C nell'intersezione con $D-l_y$. Completamento della base ABCD.

3 – Proiezione della base superiore del solido

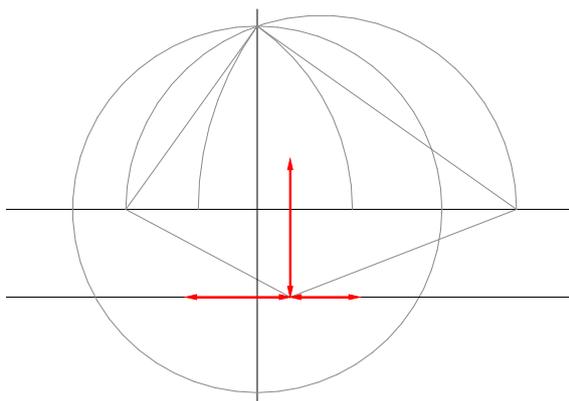
Tracciare:

- la direzione Z passante per A e riportare su Z il segmento A-E di misura 8
- il piano verticale X passante per AE di altezza 8 e lo spigolo ID
- il piano verticale Y passante per AE di altezza 8 e lo spigolo BF
- il piano verticale Y passante per ID di altezza 8 e lo spigolo CG.

Il piano verticale X passante per FB passa per CG.

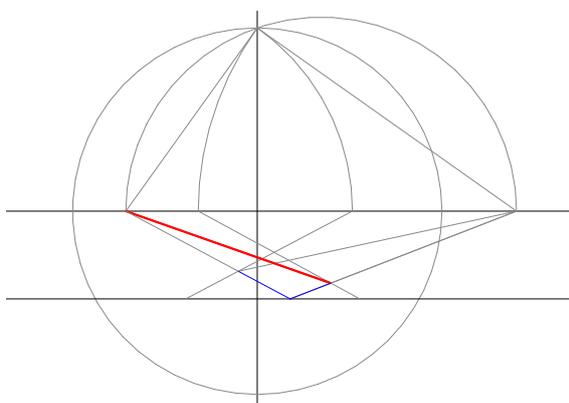
4 – Completamento grafico

Rappresentare a vista il contorno esterno del solido. Rappresentare a vista le parti interne del solido. Rappresentare le parti interne nascoste del solido con linea tratteggiata.



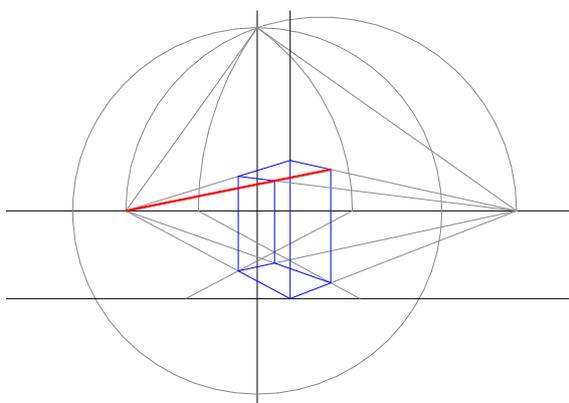
Impostare una prospettiva a quadro verticale accidentale con la direzione Z parallela al quadro determinando:

- 1) l'altezza dell'osservatore, da cui consegue la distanza fra la linea delle tracce e la linea d'orizzonte, rispettivamente intersezione col quadro del geometrale e del piano parallelo al geometrale passante per S,
- 2) il punto principale O° proiezione ortogonale del punto S sul quadro,
- 3) il cerchio delle distanze, luogo geometrico di tutti i punti distanti da O° quanto O° dista dal punto di vista S,
- 4) i punti di fuga delle rette X e Y in modo tale che il triangolo formato dalle fughe di X e Y e dal ribaltamento sul quadro di S, risulti un triangolo rettangolo, con l'angolo retto nel punto S^*
- 5) I punti di misura, distanti dalla fuga quanto la fuga dista dal punto di vista S.



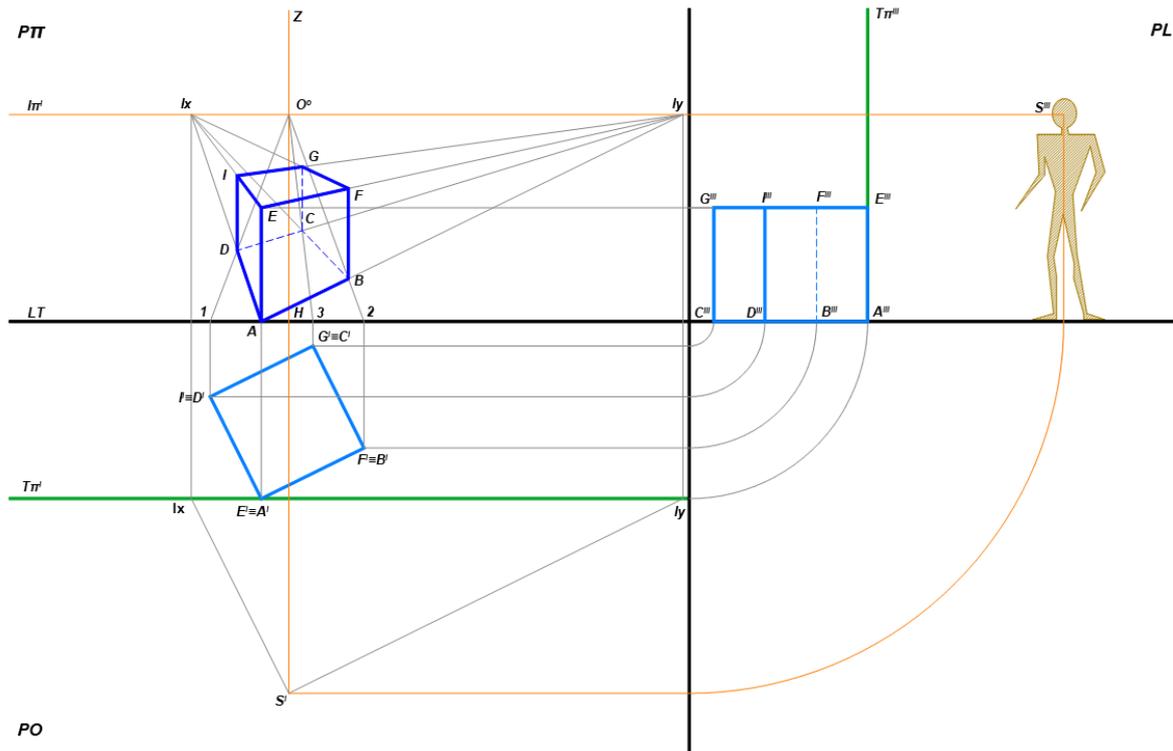
Il metodo che si intende applicare, detto appunto "metodo dei punti di misura" ci permette misurare direttamente sul quadro le misure oggettive del parallelepipedo. Per semplificare la misura delle quote del solido è opportuno, se non in presenza di eventuali specifiche indicazioni relative alla sua posizione, posizionare un punto della base inferiore del parallelepipedo sulla linea delle tracce. Misurare oggettivamente a partire da tale punto le tre misure del parallelepipedo relative ad altezza Z, larghezza X e profondità Y.

Unire la misura oggettiva del lato X con il relativo punto di misura e, sfruttandone la proprietà, individuare nella direzione corrispondente il segmento di uguale grandezza. Ripetere analogamente il procedimento anche per quanto riguarda la misura Y.



La misura delle direzioni Z presenta un procedimento più immediato poiché, dopo avere riportato le rette con direzione Z che si intende misurare, sarà sufficiente riportare la misura oggettiva sul quadro, e successivamente a partire dai suoi estremi, tracciare due rette orizzontali passanti per la retta Z che si intende misurare.

Prospettiva | Quadro Verticale Accidentale



Metodo indiretto delle ortogonali al quadro: parallelepipedo appoggiato al geometricale

1 – Impostazione dei piani di proiezione

Tracciare la LT. Tracciare il piano verticale che individua PO, PL e Piano prospettico $P\pi$.

2 – Proiezione ortogonale del solido

Rappresentare la proiezione sul PO: $E' \equiv A'$ - $F' \equiv B'$ - $G' \equiv C'$ - $I' \equiv D'$. Tracciare il raggio orizzontale r pari all'altezza del solido.

2 – Proiezione ortogonale del solido

Proiettare i punti sul piano laterale: $G'''C'''$ - $E'''A'''$ - $I'''D'''$ - $F'''B'''$. Ripassare il contorno del solido. Ripassare le parti a vista interne. Ripassare con segno tratteggiato le parti nascoste interne al solido.

3 – Impostazione della prospettiva

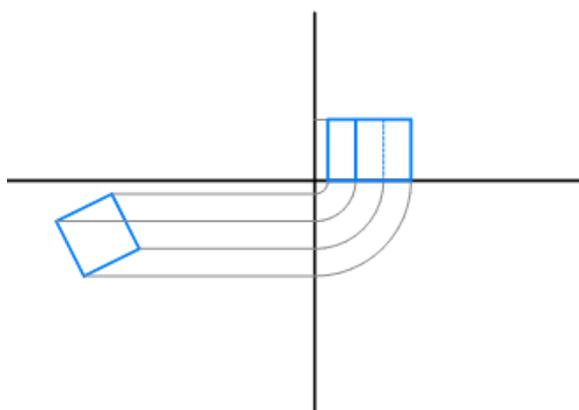
Tracciare sul PO la $T\pi'$ passante per A. Proiettare sul PL la $T\pi''$. Posizionare l'osservatore S sul piano laterale. Tracciare il raggio principale parallelamente al PO individuando $l\pi'$ sul quadro prospettico. Proiettare S sul PO. Proiettare S sul piano prospettico individuando H sulla LT e O° su $l\pi'$ con $O^\circ H$ pari all'altezza dell'osservatore. Tracciare la retta con direzione X passante per S' e determinare l_x su $T\pi'$. Proiettare ortogonalmente e individuare l_x su $l\pi'$. Tracciare la retta con direzione Y passante per S' e determinare l_y su $T\pi''$. Proiettare ortogonalmente e individuare l_y su $l\pi'$.

4 – Proiezione della base inferiore del solido

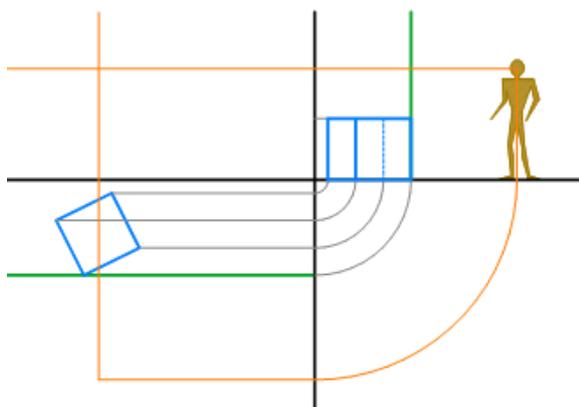
Proiettare ortogonalmente A' e individuare A sulla linea delle tracce. Unire A con l_x e l_y . Proiettare ortogonalmente D' e individuare 1 sulla linea delle tracce. Tracciare il raggio $1-O^\circ$ ortogonale al quadro e individuare D nell'intersezione con A- l_x . Proiettare ortogonalmente B' e individuare 2 sulla linea delle tracce. Tracciare il raggio $2-O^\circ$ ortogonale al quadro e individuare B nell'intersezione con A- l_y . Proiettare ortogonalmente C' e individuare 3 sulla linea delle tracce. Unire il punto 3 con O° . La retta X passante per B, la retta Y passante per D e il raggio $3-O^\circ$ individuano il punto C.

5 – Proiezione della base superiore del solido

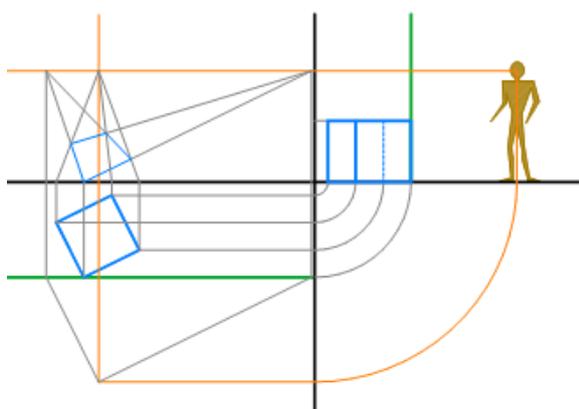
Tracciare il raggio Z passante per A sulla linea delle tracce, riportare sul quadro l'altezza del solido tracciando dal PL un raggio orizzontale e individuare il punto E. Unire E con l_x e l_y . Tracciare la Z passante per D e individuare I nell'intersezione con E- l_x . Tracciare la Z passante per B e individuare F nell'intersezione con E- l_y . Tracciare la Y passante per I e la X passante per F e individuare G nella loro intersezione. Unire CG con direzione Z. Ripassare a vista il contorno e le parti a vista interne della figura. Ripassare le parti nascoste interne della figura con segno di linea tratteggiata.



Dopo avere rappresentato, in proiezione ortogonale, sul piano orizzontale e sul piano laterale, un cubo in posizione generica appoggiato al geometrico, impostiamo, al posto della proiezione sul piano verticale, il quadro prospettico derivando l'immagine con metodo indiretto dalle proiezioni ortogonali.



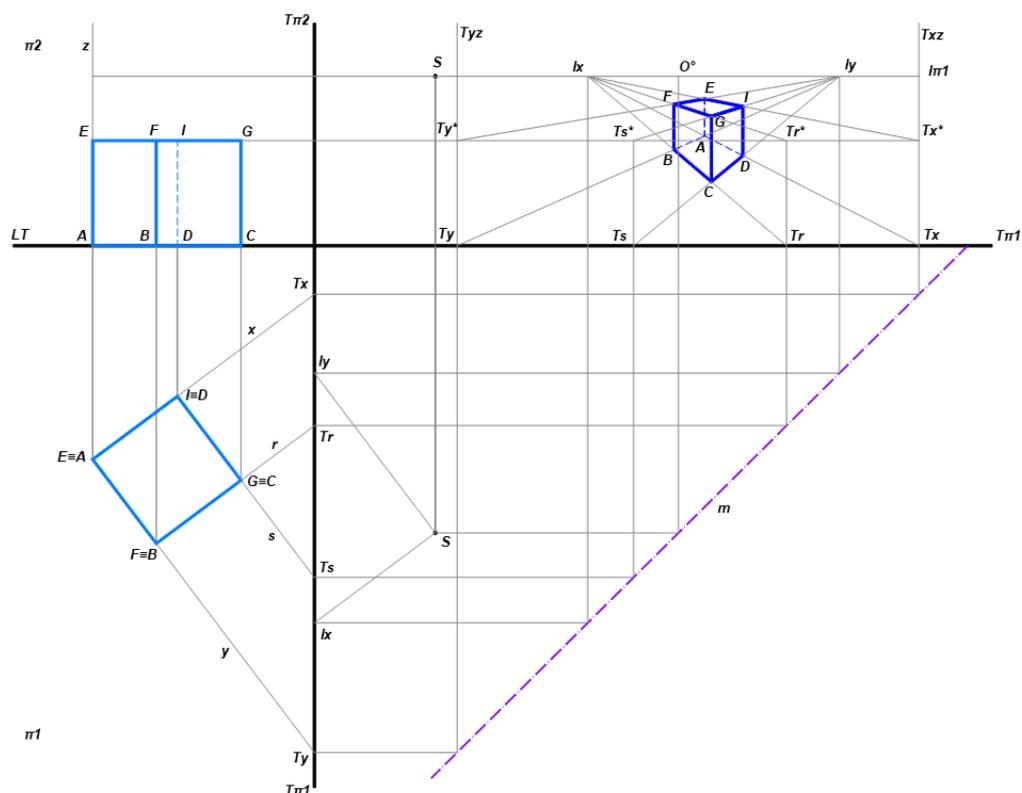
Impostiamo in seguito sui piani orizzontale e laterale la posizione dell'osservatore individuando in particolare la sua altezza, la distanza dal quadro e la direzione del raggio principale. Determiniamo la posizione del punto principale, intersezione col quadro del raggio principale, proiezione ortogonale dell'osservatore S sul quadro. Ricordiamo che il punto principale, oltre a definire l'immagine dell'osservatore sul quadro, rappresenta anche il punto di fuga delle rette ortogonali al quadro. Il metodo prospettico delle perpendicolari al quadro, sfrutta appunto la peculiarità del punto principale come punto di fuga per determinare le proiezioni sul geometrico.



Dopo avere opportunamente impostato il punto A sulla linea delle tracce, al fine di semplificare le operazioni di misura, e tracciato le rette d'appartenenza degli spigoli AD e AB, rispettivamente con direzioni X e Y, proiettiamo sul piano orizzontale i raggi ortogonali al quadro passanti per i punti della base B, C e D. Uniamo l'intersezione di questi raggi sulla linea delle tracce, con il punto principale come si è detto fuga delle perpendicolari al quadro. I punti della base saranno agevolmente identificati, nell'immagine prospettica, dall'intersezione dei raggi perpendicolari con le rette X e Y rette d'appartenenza dei lati della base. Di particolare interesse proiettivo il punto C definito dall'intersezione del raggio perpendicolare al quadro passante per la proiezione di C sulla traccia, con la retta X passante per B e la Y passante per D.

Nel "metodo indiretto delle rette ortogonali al quadro", il punto di misura utilizzato è il punto principale O° , il quale oltre ad essere il centro del cerchio delle distanze, individua la fuga delle direzioni da cui prende il nome il procedimento. I punti della figura sono individuati nell'intersezione fra le direzioni dei punti di fuga della figura e le direzioni ortogonali al quadro convergenti su O° .

Prospettiva | Quadro Verticale Accidentale



Metodo indiretto del prolungamento dei lati: parallelepipedo appoggiato al geometricale

1 – Proiezione ortogonale

Tracciare la linea di terra LT. Ortogonalmente rispetto alla LT tracciare la π_1 e π_2 . Rappresentare la prima proiezione del solido, genericamente appoggiato sul PO. Tracciare un raggio di altezza h pari alla base superiore del solido. Proiettare sul PV. Definire il contorno esterno della figura. Rappresentare le parti a vista interne. Rappresentare, con segno di linea tratteggiata, le parti nascoste interne. Completamento della doppia proiezione

2 – Determinazione delle tracce, fughe e giacitura

Prolungare le rette d'appartenenza dei lati e determinare le tracce: T_y , T_x , T_r , T_s . Direzione Z con origine in A. Rappresentare l'osservatore S, sul PO. Tracciare la parallela a x passante per S e determinare la fuga l_x . Tracciare la parallela a y passante per S e determinare la fuga l_y . Proiettare S su π_2 . Tracciare ortogonalmente a π_2 il raggio passante per S, ovvero la giacitura l_{π_1} .

3 – Asse del ribaltamento e proiezioni sul quadro prospettico

Tracciare con angolazione a 45° rispetto alla linea di terra l'asse del ribaltamento m . Proiettare: O° , l_y , l_x , T_x , T_y , T_r , T_s .

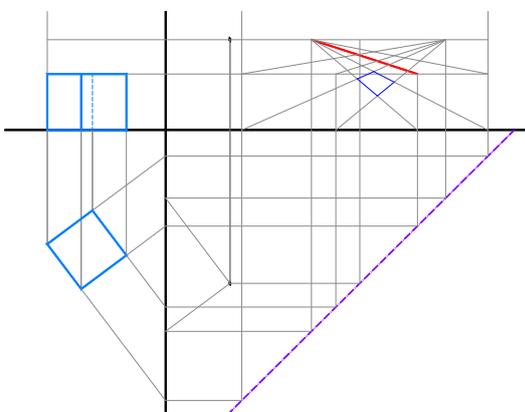
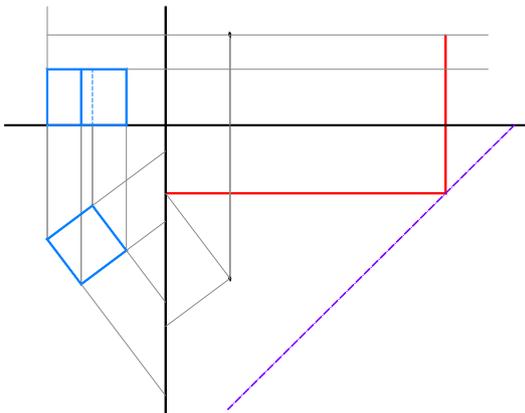
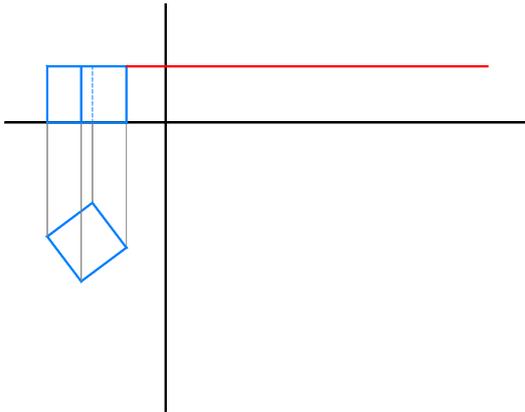
4 – Proiezioni delle basi ABCD (inferiore), EFGI (superiore) e gli spigoli verticali

Tracciare:

- l_y - T_y , l_x - T_x e determinare il punto A
- l_y - T_s e determinare D su l_x - T_x
- l_x - T_r e determinare B su l_y - T_y e C su l_y - T_s
- l_y - T_{y^*} , l_x - T_{x^*} e determinare il punto E
- l_y - T_{s^*} e determinare I su l_x - T_{x^*}
- l_x - T_{r^*} e determinare F su l_y - T_{y^*} e G su l_y - T_{s^*} .

6 – Completamento grafico

Completare tracciando gli spigoli verticali FB, GC, ID, EA. Ripassare con linea continua il contorno della figura, le parti interne a vista, e con segno di linea tratteggiata le parti interne nascoste.



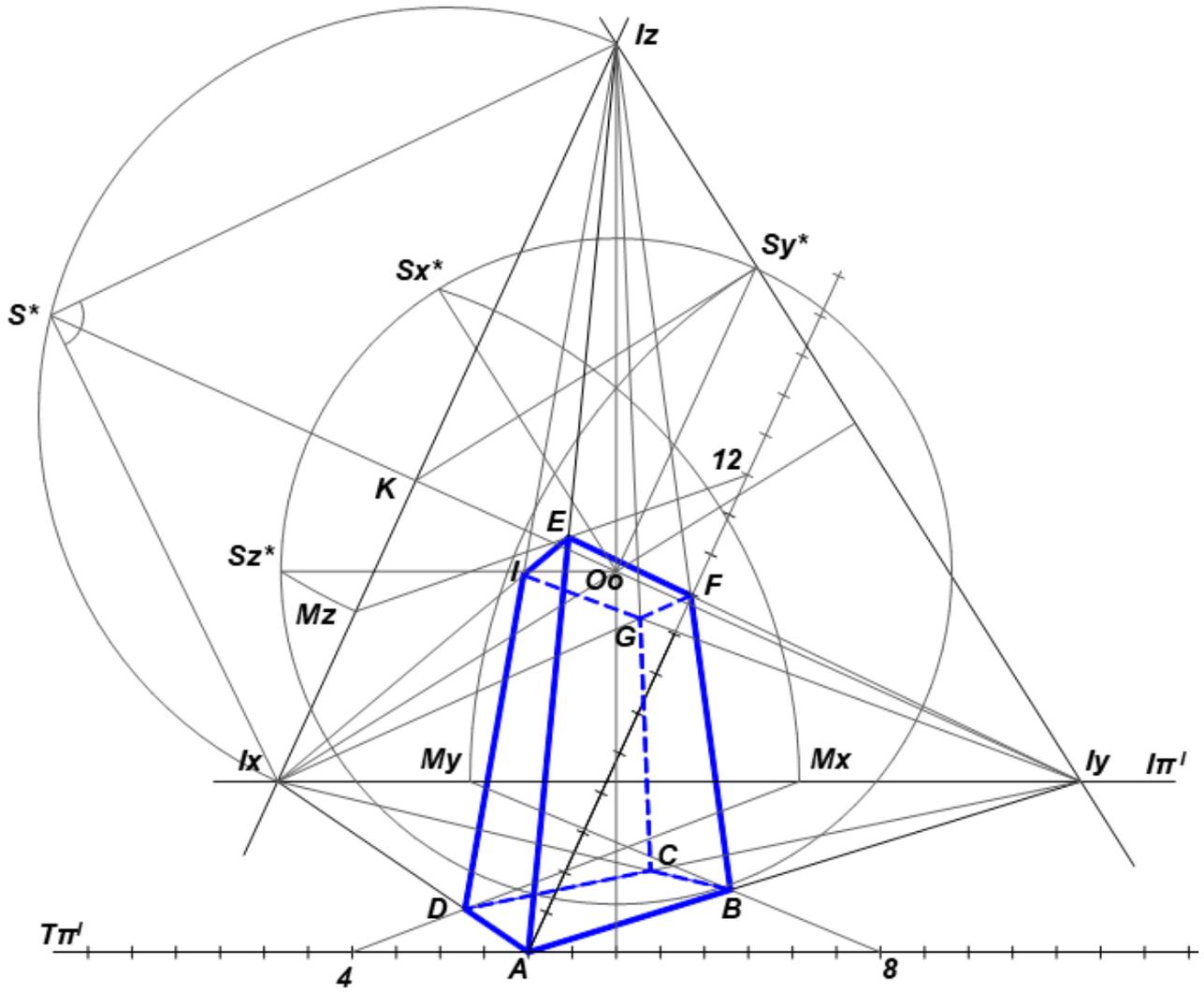
Il parallelepipedo rappresentato in doppia proiezione ortogonale appoggiato sul piano orizzontale è disposto rispetto al quadro verticale in modo accidentale. Le sue direzioni Z risultano parallele al quadro e avranno la fuga in un punto improprio mantenendo di conseguenza, la condizione di parallelismo.

Dopo avere impostato le tracce del quadro, rappresentiamo il piano orizzontale passante per la base superiore del parallelepipedo individuando la corrispondente traccia sul quadro prospettico. La scelta della posizione dell'osservatore S, in prima e seconda proiezione, determina invece le fughe di X e Y, orizzontali e inclinate rispetto al quadro, nell'intersezione con il quadro delle rette X e Y passanti per l'osservatore S. Per riportare le proiezioni sul quadro prospettico utilizzeremo un asse di ribaltamento orientato di 45° rispetto alla traccia $\pi\pi_1$ del quadro sul geometricale.

La figura può essere interpretata, analogamente a quanto proposto nei metodi presentati in precedenza, come intersezione fra raggi X, Y, Z, individuando prima nelle proiezioni ortogonali, e successivamente riportando sul quadro, la fuga e la traccia di ogni retta che concorre alla rappresentazione del solido. È comunque possibile concepire il volume, come determinato dall'intersezione di piani fra loro ortogonali. Il metodo indiretto, che presenta dal punto di vista operativo una complessità maggiore rispetto ai metodi diretti, che non necessitano della rappresentazione in proiezione ortogonale del solido, offre la possibilità di chiarire ed evidenziare le relazioni geometrico proiettive di tutti gli elementi che concorrono alla definizione del metodo.

Gli elementi della percezione dello spazio:

1. *Linee convergenti in un punto generano una forte sensazione di profondità.*
2. *Un volume lontano appare più piccolo di uno di uguali dimensioni ma più vicino all'osservatore.*
3. *L'infittimento delle immagini, che si accentua all'aumentare della distanza dell'osservatore.*
4. *In una rappresentazione oggetti sovrapposti vengono percepiti più vicini all'osservatore.*
5. *La distribuzione dell'ombra, propria e portata, e del chiaroscuro che dipende dall'angolazione del raggio luminoso rispetto alla superficie, è un indicatore fondamentale per la percezione della profondità.*





Prospettiva a quadro inclinato di un parallelepipedo appoggiato al geometrale Metodo diretto dei punti di misura (vista dal basso)

1 – Il triangolo delle fughe

Tracciare a piacere un triangolo scaleno di vertici I_x , I_y e I_z , fughe della prospettiva a quadro inclinato.

2 – L'ortocentro del triangolo delle fughe e il cerchio delle distanze.

Tracciare le altezze del triangolo e determinare O° . Tracciare la semicirconferenza di diametro $I_x I_z$. Prolungare l'altezza passante per il vertice I_y determinando K su $I_x I_z$ e S^* sulla semicirconferenza. Inscrivere nella semicirconferenza il triangolo rettangolo $I_x I_z S^*$. Tracciare la perpendicolare a $K-O^\circ$, passante per O° . Con apertura di compasso $K S^*$ puntare su K e tracciare l'arco che individua il punto S_y^* sulla perpendicolare passante per O° . $O^\circ S_y^*$ è il raggio del cerchio delle distanze. Puntare in O° e tracciare il cerchio.

3 – La linea delle tracce xy e la determinazione dello scorcio prospettico

Impostare in modo parallelo alla $I\pi^l$ la retta $T\pi^l$. Fissare a piacere la posizione del punto A del solido, sulla $T\pi^l$. Unire A con I_x , I_y e I_z .

4 – I punti di misura

Tracciare la perpendicolare a $I_x O^\circ$ passante per O° e determinare sul cerchio delle distanze il punto S_x^* . Con apertura di compasso $I_x S_x^*$ puntare su I_x e tracciare l'arco che interseca la $I\pi^l$ nel punto M_x . Con apertura di compasso $I_y S_y^*$ puntare su I_y e tracciare l'arco che interseca la $I\pi^l$ nel punto M_y . Tracciare la perpendicolare a $I_z O^\circ$ passante per O° e determinare sul cerchio delle distanze il punto S_z^* . Con apertura di compasso $I_z S_z^*$ puntare su I_z e tracciare l'arco che interseca la $I_x I_z$ nel punto M_z .

5 – Le misure oggettive

Inserire nella $T\pi^l$ una scala numerica per le direzioni X e Y , a partire dal punto A . Tracciare una direzione parallela a $I_x I_z$ in cui inserire una scala numerica per le direzioni Z a partire dal punto A .

8 – Determinazione della base inferiore ABCD

Unire il punto 4, alla sinistra di A , con il punto M_x e determinare D nell'intersezione con $A I_x$. Unire il punto 8, alla destra di A , con il punto M_y e determinare B nell'intersezione con $A I_y$. Unire il punto D , con il punto I_y e B con il punto I_x : nell'intersezione determinare il punto C .

9 – Determinazione della base superiore EFGI

Tracciare le direzioni Z passanti per i punti B , C e D della base inferiore. Unire il punto E , con il punto I_x e determinare I nell'intersezione con $D I_z$. Unire il punto E , con il punto I_y e determinare F nell'intersezione con $B I_z$. Unire il punto I , con il punto I_y e F con il punto I_x : nell'intersezione determinare il punto G . Ripassare con segno di linea continua le parti a vista partendo dal contorno della figura e le parti nascoste con segno di linea tratteggiata

Definizioni - Regole - Indicazioni

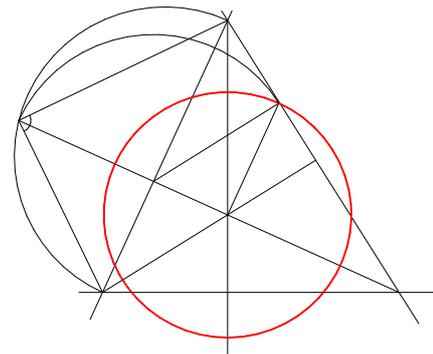
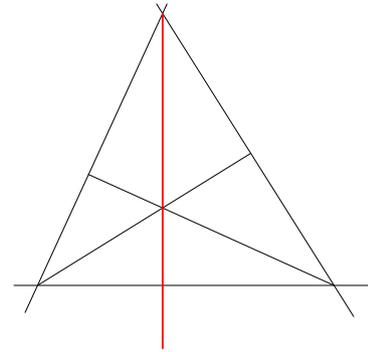
La giacitura di un piano è l'intersezione col quadro del piano parallelo al piano dato, passante per S (Osservatore). Le rette $I_z I_x$, $I_x I_y$ e $I_x I_z$ rappresentano le giaciture dei piani zx , xy e yz . L'ortocentro del triangolo delle fughe, O° , rappresenta la proiezione ortogonale di S (Osservatore) sul quadro. $O^\circ S_y^*$ raggio del cerchio delle distanze è la distanza principale, ovvero la distanza minima fra osservatore e quadro. Il cerchio delle distanze è il luogo geometrico di tutti i punti che distano da O° quanto O° dista da S . Tra giacitura e traccia c'è necessariamente condizione di parallelismo in quanto intersezione col quadro di due piani fra loro paralleli. Lo scorcio prospettico deve essere impostato tenendo conto che tanto più ci si allontana dal cerchio delle distanze, tanto più l'immagine sarà deformata dalle aberrazioni prospettiche. I punti di misura distano dalla fuga quanto la fuga dista da S . Le misure, per essere determinate in modo oggettivo, devono essere sempre riportate sul quadro (Linee delle tracce). Determinati tutti i punti della figura, ripassare gli spigoli tenendo conto che la grossezza delle linee a vista continue deve essere doppia rispetto alle parti nascoste tratteggiate.

La posizione generica della terna triortogonale X, Y e Z rispetto al quadro determina sul quadro un triangolo, detto delle fughe, in cui i tre vertici rappresentano il punto di fuga di ognuna delle tre direzioni fondamentali mentre le tre rette passanti per i vertici definiscono le giaciture dei piani corrispondenti XY, XZ e YZ. L'ortocentro del triangolo delle fughe determina il punto principale O° , proiezione dell'osservatore S sul quadro.

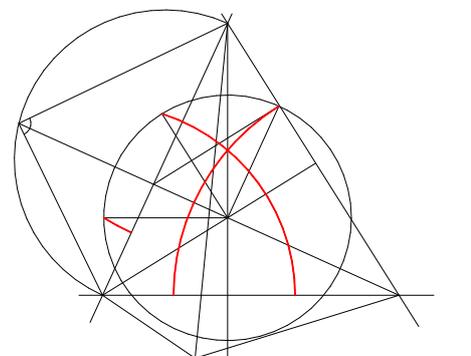
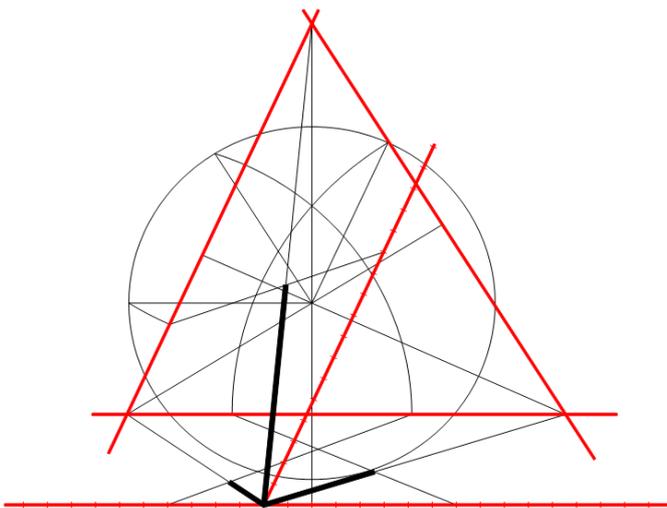
Per determinare il raggio del cerchio delle distanze, luogo geometrico di tutti i punti che distano da O° quanto O° dista da S, ribaltiamo innanzitutto il triangolo rettangolo, inscrivendolo in una semicirconfenza di diametro l_x-l_z e vertice nella direzione del prolungamento di l_y-O° che determina il punto K sul lato l_x-l_z . Riportando l'altezza del triangolo sulla direzione ortogonale ad essa passante per O° si ottiene il ribaltamento del triangolo $O^\circ-K-S$ il cui lato $O^\circ-S$ rappresenta la distanza dell'osservatore dal quadro ovvero il raggio del cerchio delle distanze.

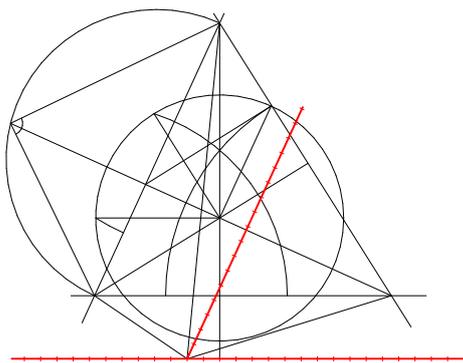
Sapendo che i punti di misura distano dalla fuga quanto la fuga dista da S, riportare sulla giacitura XY la distanza l_x-S^* opportunamente ribaltata sul quadro, e determinare M_x punto di misura delle rette orizzontali con direzione X. Riportare, analogamente a quanto fatto per M_x , i punti di misura M_y delle rette orizzontali Y e M_z delle rette verticali Z.

Riportare le quote Z dopo avere riportato la misura oggettiva sulla traccia, parallela a l_x-l_z , e successivamente unire con il punto di misura delle Z e riportare la misura scosciata sulla direzione A- l_z . Dopo avere tracciato le direzioni Z passanti per la base del solido individuare nelle intersezioni corrispondenti i punti della base maggiore.



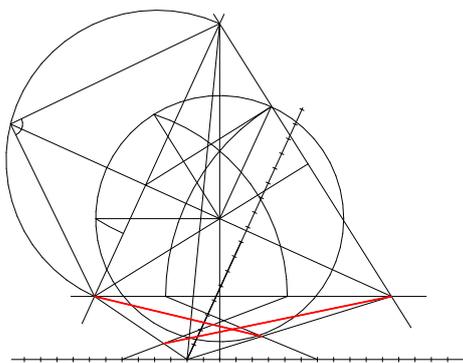
Giaciture e tracce





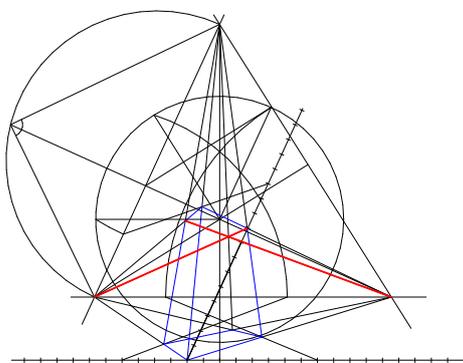
Dopo avere proceduto a rappresentare i punti di misura riportiamo sul quadro le tracce e individuamo le misure oggettive sul quadro. Infatti è solamente sul quadro che le misure dell'oggetto si presentano nelle dimensioni reali in vera forma e grandezza. L'unico aspetto che dobbiamo considerare è che fra la giacitura dove abbiamo individuato i punti di misura e tracce sul quadro deve esserci condizione di parallelismo. Questo perché le due linee, traccia e giacitura, rappresentano le intersezioni col quadro di due piani fra loro paralleli. In considerazione di ciò la traccia su cui riportare oggettivamente le misure Z dovrà essere parallela alla giacitura XZ.

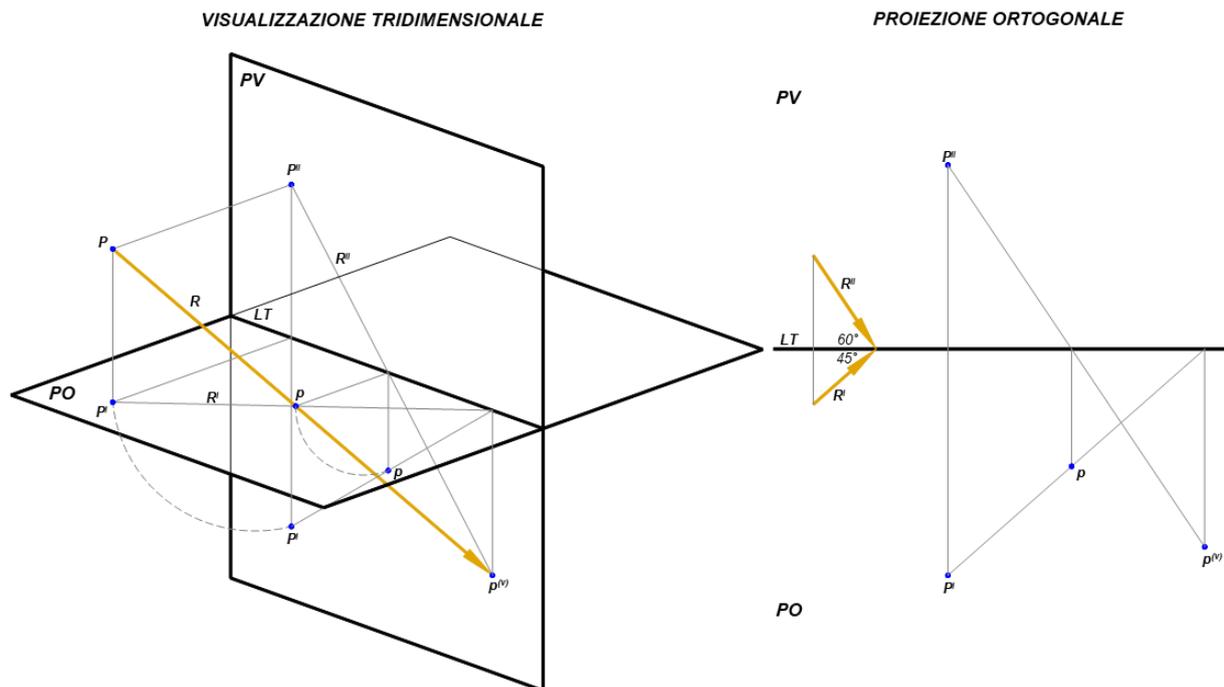
Riportare quindi le misure oggettive sulle tracce e unire con i punti di misura. Le intersezioni sulle corrispondenti direzioni individuano i punti sul quadro prospettico. Riportando i punti ottenuti sulle fughe si ottiene la proiezione della base sul geometrico.



Il risultato di una rappresentazione prospettica dipende, come più volte evidenziato, da una serie di fattori correlati all'esito finale che si vuole ottenere. Sicuramente la relazione fra oggetto, quadro e punto di vista condiziona e determina il risultato complessivo. In particolare per quanto riguarda il punto di vista, al fine di non andare incontro a forti aberrazioni prospettiche, sarebbe opportuno evitare alcune posizioni limite:

1. la posizione dell'osservatore troppo vicino all'oggetto che determina l'immagine dell'oggetto non compresa, come limite massimo, all'interno del cerchio delle distanze, da cui deriva una forte differenza dimensionale fra oggetti vicini e lontani.
2. Il piano meridiano principale, non deve coincidere con parti strutturali dell'oggetto poiché la percezione del volume ne risulterebbe fortemente compromessa con elementi dello stesso piano che risulterebbero allineati sulla stessa retta.
3. L'altezza dell'osservatore, determina la linea d'orizzonte che a sua volta ci permette di realizzare pur all'interno delle varie tipologie di prospettiva la vista dall'alto rispetto al solido detta "a volo d'uccello", ad "altezza d'uomo" tra 150-180 cm dal geometrico, "rasoterra" con la linea d'orizzonte che coincide con la linea delle tracce.





Ombra di un punto generico P sul piano orizzontale e sull'estensione del piano verticale

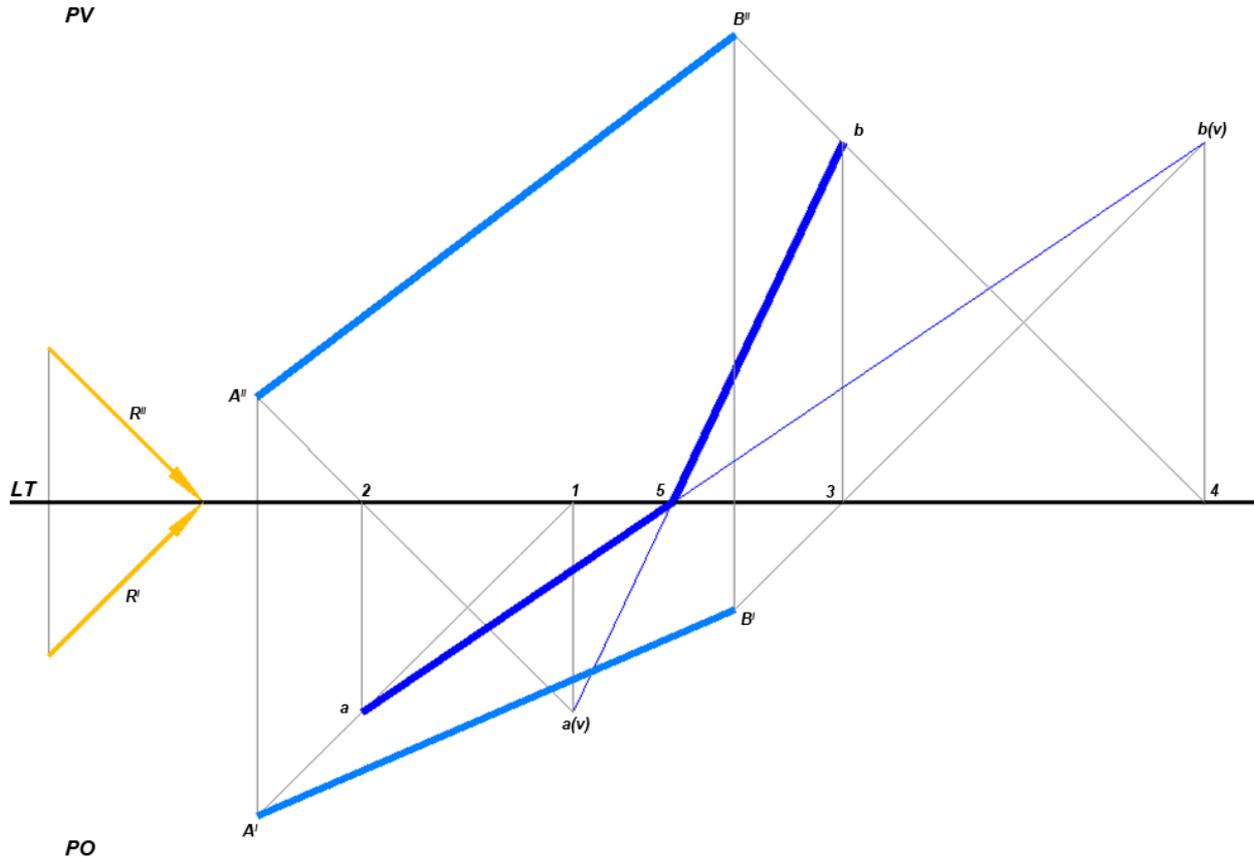
L'ombra portata di un punto generico P, è determinata dall'intersezione del raggio di luce R con uno dei piani di proiezione, nei casi più generici il piano orizzontale o il piano verticale. La posizione dell'ombra dipende, oltre che dalla posizione del punto, dalla direzione del raggio di luce, espressa dalle sue proiezioni R^I e R^{II} rispettivamente sul piano orizzontale e su quello verticale. In linea del tutto teorica la direzione delle proiezioni del raggio rispetto al riferimento della linea di terra, possono presentarsi in tutte le angolazioni comprese fra $> 0^\circ$ e $> 90^\circ$ anche se convenzionalmente la soluzione più utilizzata è quella con angolazioni a 45° che corrispondono ad un raggio di luce con direzione uguale alla diagonale di un cubo. In questo caso si è scelto un angolo di 45° per R^I e di 60° per R^{II} .

Una volta determinato il punto P attraverso le sue proiezioni P^I e P^{II} tracciamo il raggio R. L'intersezione della proiezione di R sulla LT, più vicina al raggio proiettante del punto, in questo caso la R^{II} , determina il punto in cui tracciare il raggio ortogonale per la individuazione dell'ombra portata nell'intersezione con la proiezione R^I .

Oltre all'ombra portata reale sul piano orizzontale, il punto P proietta anche un'ombra "virtuale" $p^{(V)}$ sull'estensione del piano verticale. Per la individuazione dell'ombra virtuale, si procede tracciando il raggio ortogonale alla LT nell'intersezione con R^I e determinando l'intersezione con il prolungando di R^{II} .

La determinazione dell'ombra virtuale sarà di particolare utilità nella rappresentazione dell'ombra di segmenti inclinati i cui estremi proiettano l'ombra su due piani di proiezione distinti, ad esempio uno sul piano orizzontale e l'altro sul piano verticale.

Teoria delle ombre | Proiezioni Ortogonali | Segmenti



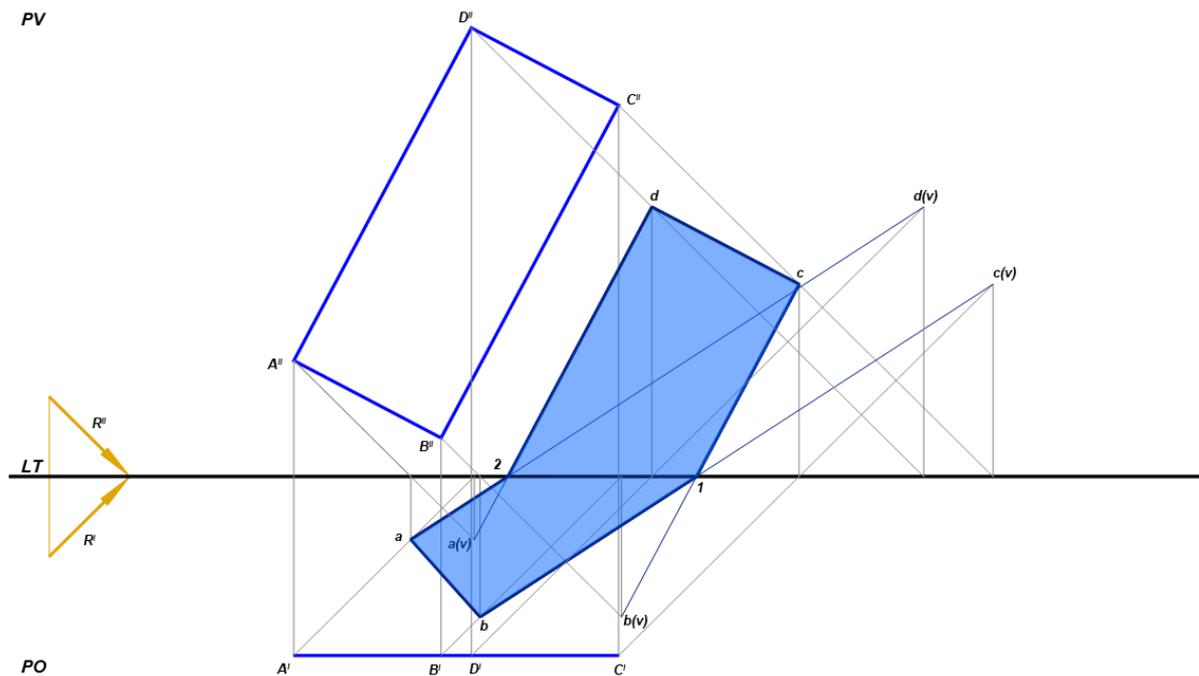
Ombra portata di un segmento inclinato sui Piani Orizzontale e Verticale

Il segmento si presenta in posizione genericamente inclinata rispetto ai piani principali escludendo quindi la possibilità di determinare l'ombra portata sfruttando la condizione di parallelismo. Dopo avere determinato la direzione delle proiezioni dei raggi determiniamo le ombre degli estremi del segmento che nel caso in oggetto si trovano una sul piano orizzontale e l'altra sul piano verticale.

Pertanto si rende necessario procedere alla determinazione dei punti virtuali delle ombre portate degli estremi del segmento, con le modalità applicate nei precedenti esempi. Una volta determinata l'ombra virtuale dell'estremo del segmento sull'estensione del piano verticale uniremo tale punto con l'ombra effettiva del secondo estremo sul piano verticale. Il segmento che unisce i due punti, intersecato dalla linea

di terra, rappresenta l'ombra in parte virtuale del segmento dato. La porzione reale di una parte del segmento sul piano verticale è data dalla parte del segmento-ombra che unisce l'ombra dell'estremo e l'intersezione con la linea di terra.

Possiamo completare la rappresentazione dell'ombra portata del segmento unendo l'intersezione con la linea di terra e l'ombra dell'estremo del segmento sul piano orizzontale. Il procedimento può essere ulteriormente completato e verificato nella sua correttezza, determinando il punto virtuale dell'estremo del segmento sull'estensione del piano orizzontale e in un secondo tempo unendolo con l'ombra reale dell'estremo sul medesimo piano. Quest'ulteriore passaggio ci permette di confermare la direzione della parte di ombra portata sul piano orizzontale, determinata in precedenza, confermando la correttezza metodologica del procedimento proiettivo.



Ombra portata di un rettangolo parallelo al piano verticale

1 – Doppia proiezione del rettangolo e impostazione delle proiezioni del raggio di luce

Dato il rettangolo ABCD parallelo al PV, impostare R^I e R^{II} rispettivamente proiezioni del raggio luminoso su PO e PV.

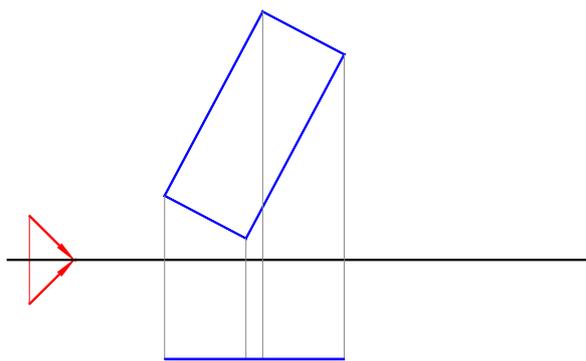
2 – Determinazione dell'ombra dei punti A, B, C e D

Tracciare:

- R^I per A^I e R^{II} per A^{II} .
- il raggio ortogonale passante per l'intersezione di R^{II} con la linea di terra e determinare l'ombra "a" nell'intersezione con R^I passante per A^I .
- R^I per B^I e R^{II} per B^{II} .
- il raggio ortogonale passante per l'intersezione di R^{II} con la linea di terra e determinare l'ombra "b" nell'intersezione con R^I passante per B^I .

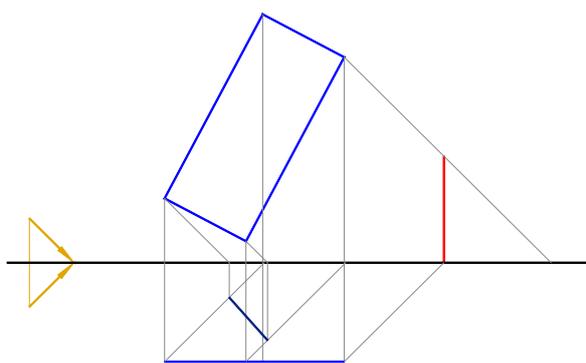
3 – Determinazione delle ombre dei lati AB, BC, CD e DA

Unire a-b, sul PO, ombra portata del lato AB. Tracciare R^I per C^I . Tracciare R^{II} per C^{II} . Tracciare il raggio ortogonale passante per l'intersezione di R^I con la linea di terra e determinare l'ombra 'c' nell'intersezione con R^{II} passante per C^{II} . C: Tracciare sul PV il raggio ortogonale passante per l'intersezione di R^{II} con la linea di terra. Prolungare sul PV, R^I per C^I e individuare $c(v)$ ombra virtuale di C sul PO. Unire l'ombra portata sul PO b-c(v) rimarcandola fino all'intersezione 1 sulla linea di terra. B: Tracciare sul PO il raggio ortogonale passante per l'intersezione di R^I con la linea di terra. Prolungare sul PO, R^{II} per B^{II} e individuare $b(v)$ ombra virtuale di B sul PV. Unire l'ombra portata sul PV c-b(v) rimarcandola fino all'intersezione 1 sulla linea di terra. Ombra portata del lato AB: b-1-c. Tracciare R^I per D^I . Tracciare R^{II} per D^{II} . Tracciare il raggio ortogonale passante per l'intersezione di R^I con la linea di terra e determinare l'ombra 'd' nell'intersezione con R^{II} passante per D^{II} . Unire c-d, sul PV, ombra portata del lato CD. D: Tracciare sul PV il raggio ortogonale passante per l'intersezione di R^{II} con la linea di terra. Prolungare sul PV, R^I per D^I e individuare $d(v)$ ombra virtuale di D sul PO. Unire l'ombra portata sul PO a-d(v) rimarcandola fino all'intersezione 2 sulla linea di terra. A: Tracciare sul PO il raggio ortogonale passante per l'intersezione di R^I con la linea di terra. Prolungare sul PO, R^{II} per A^{II} e individuare $a(v)$ ombra virtuale di A sul PV. Unire l'ombra portata sul PV d-a(v) rimarcandola fino all'intersezione 2 sulla linea di terra. Ombra portata del lato AD: a-2-d. Campire l'area delimitata dai punti: a, b, 1, c, d, 2.

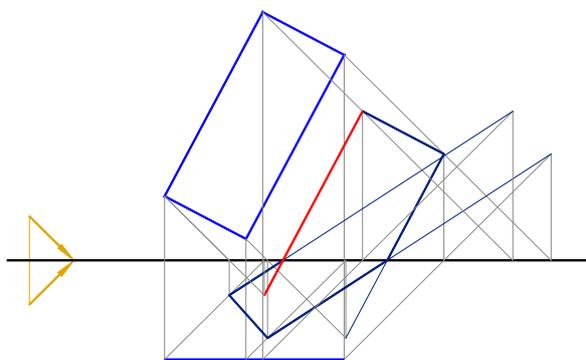


Il rettangolo del quale si vuole determinare l'ombra portata è parallelo al piano verticale. Le due proiezioni dei raggi di luce sui piani orizzontale e verticale si incontrano in un punto della linea di terra formando su di essa angoli di 45° . Questa inclinazione presuppone la fonte di luce avente origine impropria, con tutti i raggi fra loro paralleli, e con direzione corrispondente alla diagonale di un cubo.

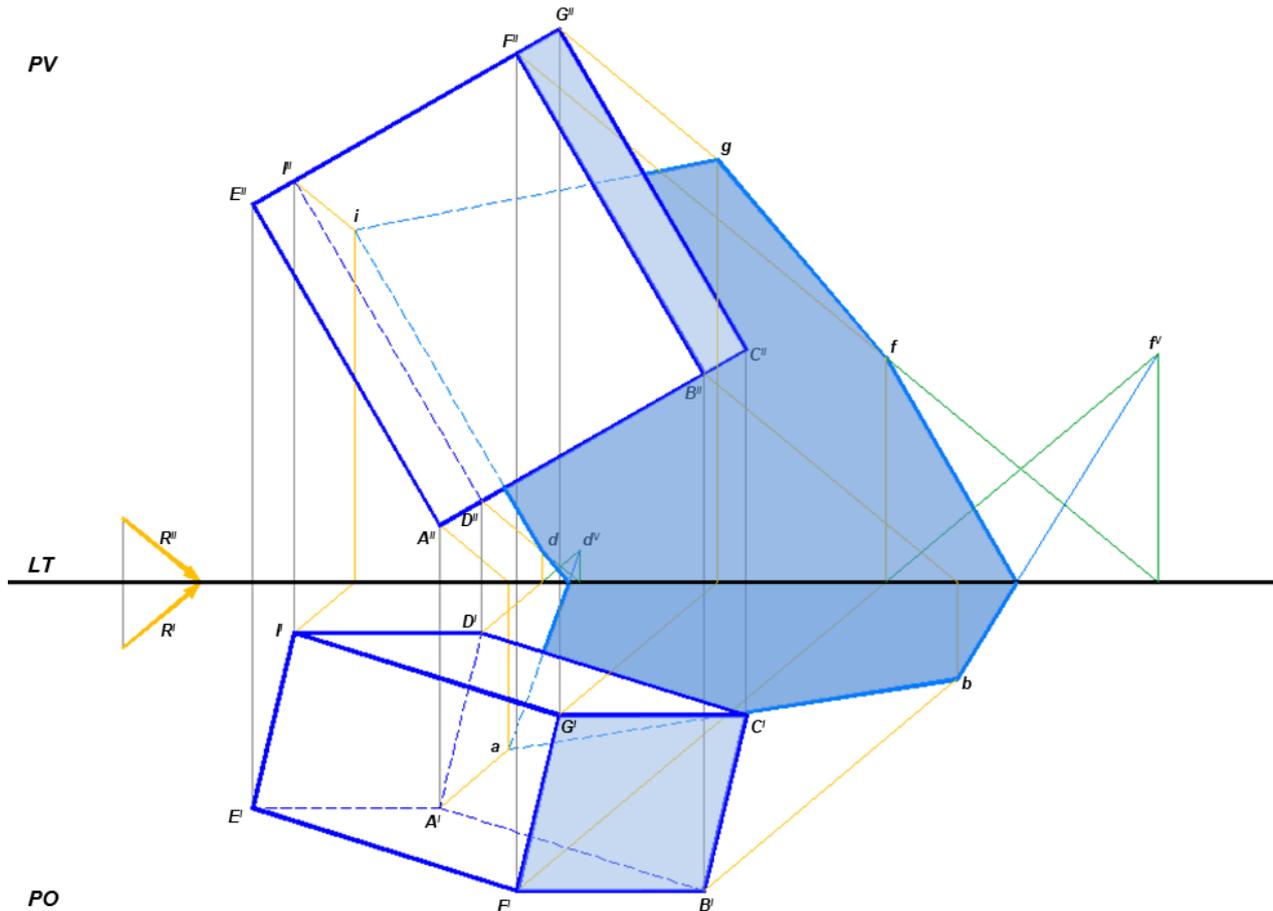
L'esempio, analogo al precedente, si può risolvere tenendo conto della condizione di parallelismo della figura rispetto al piano verticale oppure determinando l'ombra virtuale dei punti sui piani principali. Dopo avere tracciato e unito l'ombra dei vertici del rettangolo sul piano orizzontale si procede alla individuazione dell'ombra dei punti sul piano verticale.



Proiettiamo l'ombra portata del rettangolo sul piano verticale in vera forma e grandezza, con i lati e le rispettive ombre paralleli fra loro. Si potrebbero a questo punto unire le intersezioni dell'ombra con la linea di terra e poi unire con l'ombra dei punti rilevati sul piano orizzontale. Possiamo altresì operare determinando le ombre virtuali sull'estensione dei piani principali, in perfetta analogia con il procedimento esposto nell'esempio precedente. I due metodi, del parallelismo e dei punti virtuali, possono essere integrati nel procedimento al fine di rendere più chiari i passaggi esecutivi e per confermarne la correttezza metodologica.



La rappresentazione delle ombre all'interno dei sistemi della geometria descrittiva, consente di determinare e mettere in relazione le ombre con le proprietà geometriche e dimensionali degli oggetti. Possiamo definire la teoria delle ombre come un sistema proiettivo non autonomo, che si innesta nei diversi metodi della geometria descrittiva. Così come un'ombra non può che avere origine da un oggetto, e aggiungiamo da un contesto, così la "rappresentazione" dell'ombra non può prescindere dalla "rappresentazione" dell'oggetto. Inoltre la teoria delle ombre utilizza gli stessi procedimenti dei metodi proiettivi della geometria descrittiva, primo fra tutti quello della proiezione e sezione. Si configurano quindi, all'interno dello stesso sistema, due metodi proiettivi distinti e complementari, poiché al variare dell'uno corrisponde la variazione dell'altro.



Ombra propria e portata di un parallelepipedo con asse inclinato rispetto al piano orizzontale e parallelo al piano verticale.

1 – Impostazione della figura e dei raggi luminosi

Proiettare un parallelepipedo inclinato al PO e con gli spigoli laterali paralleli al PV. Impostare la direzione del raggio di luce R , rappresentando le proiezioni R^I e R^{II} .

2 – Impostazione della separatrice d'ombra propria

Individuare sul parallelepipedo i punti della separatrice d'ombra propria: A-B-F-G-I-D.

3 – Determinazione dell'ombra della separatrice

Trovare l'ombra dei punti nell'intersezione fra R^I passante per la prima proiezione e R^{II} passante per la seconda proiezione. Completamento dell'ombra dei singoli punti su PO e PV.

4 – Determinare l'ombra virtuale del punto F (f^V) sull'estensione del PO

Prolungare R^I . Prolungare R^{II} fino ad intercettare la LT nel punto 1. L'intersezione della verticale passante per 1 con il prolungamento di R^I determina l'ombra virtuale f^V .

5 – Determinare l'ombra virtuale del punto D (d^V) sull'estensione del PO

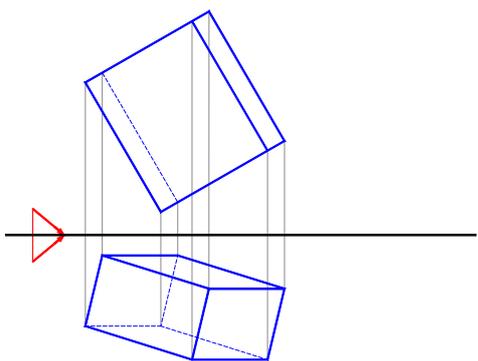
Prolungare R^I . Prolungare R^{II} fino ad intercettare la LT nel punto 2. L'intersezione della verticale passante per 2 con il prolungamento di R^I determina l'ombra virtuale d^V .

6 – Determinare il contorno dell'ombra portata

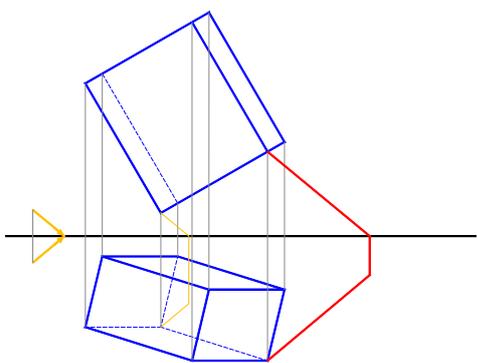
Unire in sequenza i punti d'ombra della separatrice così come evidenziato nello schema. Completamento del contorno dell'ombra portata.

7 – Campitura

Campire con tonalità intermedia la parte in ombra propria sul PO e sul PV. Campire con tonalità più scura la parte in ombra portata sul PO e sul PV.

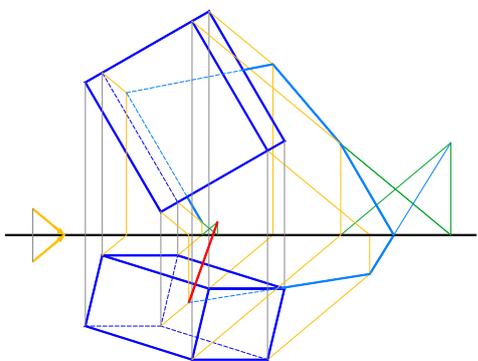


Per determinare l'ombra del parallelepipedo in oggetto, inclinato rispetto al piano orizzontale, si deve dopo avere impostato le direzioni delle proiezioni del raggio di luce coincidenti in un punto della linea di terra, individuare all'interno del solido le parti illuminate, ovvero direttamente colpite dai raggi luminosi e le parti nascoste rispetto alla fonte luminosa in condizione d'ombra propria. Individuiamo sul profilo esterno del solido la separatrice d'ombra propria, ovvero la spezzata continua sghemba che separa parti illuminate da parti in ombra propria.



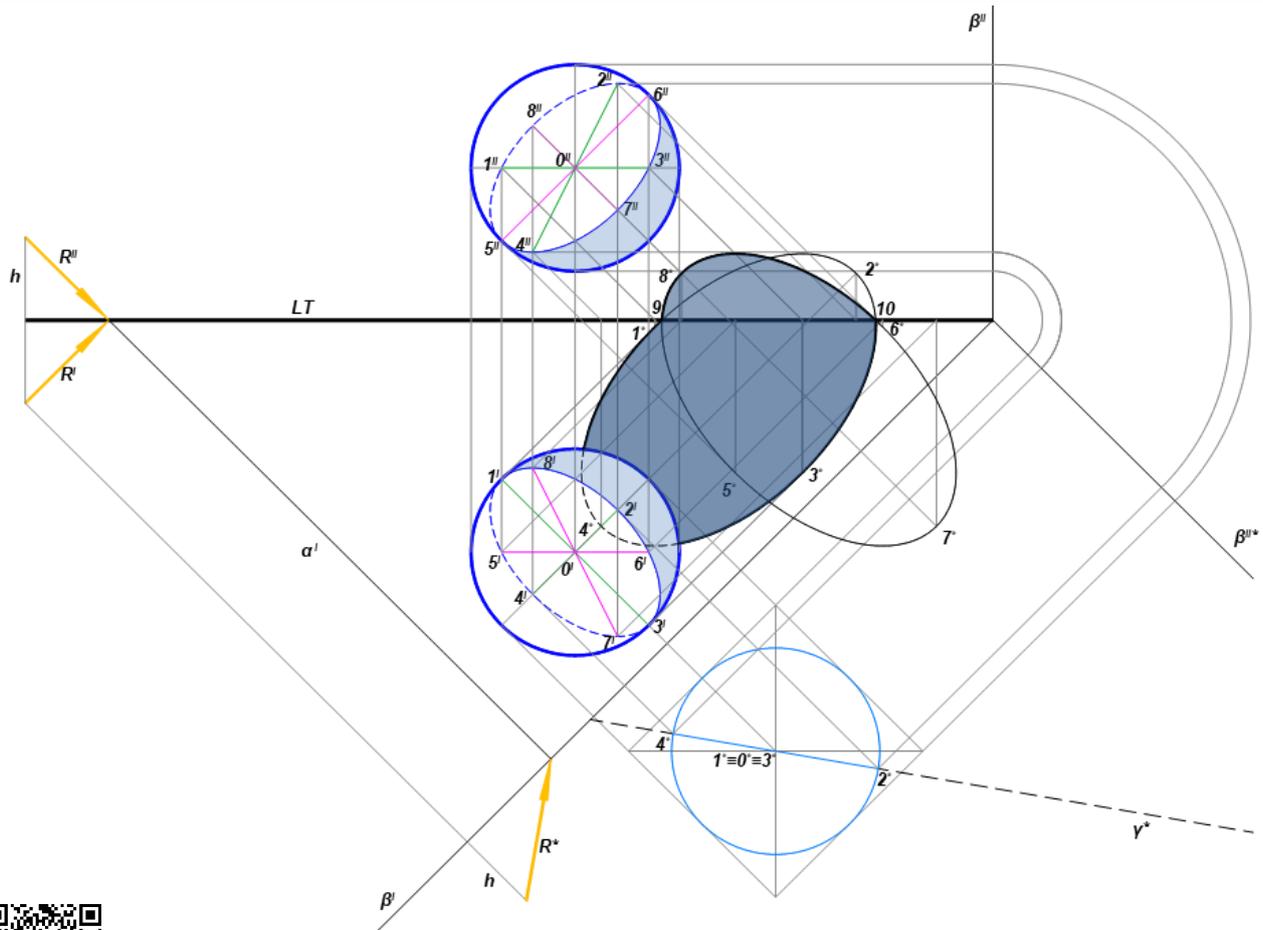
Possiamo considerare la separatrice d'ombra propria come il contorno dell'immagine del solido proiettata dal punto della fonte di luce. A sua volta il fascio di luce passante per la separatrice si interrompe sul piano di proiezione o su altro solido determinando il contorno dell'ombra portata.

Queste poche considerazioni evidenziano il forte legame proiettivo che intercorre fra separatrice d'ombra propria e contorno dell'ombra portata.



Dall'analisi della forma del parallelepipedo e dalla posizione rispetto ai piani di proiezione, si evince che possiamo applicare la condizione di parallelismo solamente per gli spigoli verticali del solido mentre tutte le altre parti saranno inclinate rispetto ai piani di proiezione. Procederemo quindi all'individuazione dell'ombra di tutti i punti costituenti la separatrice d'ombra propria. I punti appartenenti allo stesso piano di proiezione saranno quindi uniti secondo la sequenza all'interno della separatrice. Per i segmenti i cui estremi si dovessero trovare su piani differenti, determineremo i segmenti-ombra attraverso l'individuazione dei punti virtuali sull'estensione del piano dove si proietta l'ombra. Completato il contorno dell'ombra portata si procede alla campitura delle superfici ricordando che le facce in condizione d'ombra propria dovranno essere rappresentate per mezzo di una trama più chiara rispetto alla tonalità più scura dell'ombra portata.

Esistono due tipologie di fonti di luce: 1) Fonte di luce naturale a distanza infinita, equiparabile alla luce del sole i cui raggi per effetto della lunga distanza da cui provengono possono considerarsi fra loro paralleli. 2) Fonte di luce artificiale, assimilabile alla luce di una lampada, misurabile rispetto al quadro e con i raggi convergenti nel punto di luce.



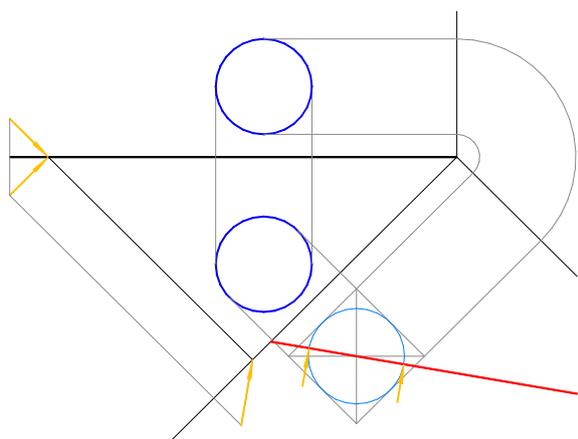
Ombra propria e portata di una sfera sul piano orizzontale e sul piano verticale

1 – Determinazione della separatrice d'ombra propria.

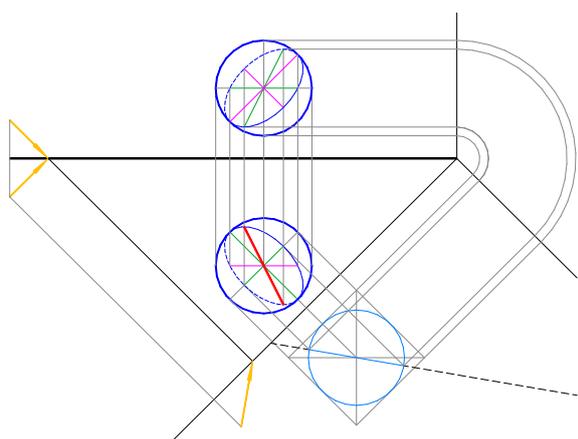
Data la doppia proiezione della sfera, impostare la direzione delle proiezioni R^I e R^{II} dei raggi di luce. Tracciare α^I traccia del piano α ortogonale a R . Tracciare β^I traccia del piano ortogonale al piano α e al PO. Proiettare R^I su β^I . Riportando la quota h determinare R^* proiezione di R sul piano β ribaltato sul PO. Tracciare β^{II*} ortogonale a β^I . Tracciare β^{II} ortogonale alla LT. Proiettare la sfera dal PO su β , ortogonalmente a β^I . Proiettare la sfera dal PV ortogonalmente a β^{II} e riportare sul ribaltamento di β . Tracciare le diagonali del quadrato su cui inscrivere la proiezione della sfera su β . Tracciare su β , la retta ortogonale a R^* , passante per il centro della sfera e individuare i punti 1, 0, 3, 4 e 2 della separatrice d'ombra propria. Tracciare il diametro della sfera parallelo a β^I . Proiettare il diametro 1^*-3^* sul PO ortogonalmente a R^I . Proiettare sul PO i punti 2^* e 4^* sul diametro della sfera parallelo a β^I . Tracciare l'ellisse con gli assi 1^I-3^I e 2^I-4^I , separatrice d'ombra propria della sfera sul PO. Evidenziare la parte della sfera in condizione d'ombra propria. Proiettare 0^I sul PV. Tracciare il diametro orizzontale e individuare 0^{II} sul PV. Proiettare i punti 1^I e 3^I sul PV. Individuare 4^{II} proiettando 4^I dal PO e 4^* dal piano β . Individuare 2^{II} proiettando 2^I dal PO e 2^* dal piano β . Tracciare $2^{II}-4^{II}$. Tracciare il diametro $5^{II}-6^{II}$ ortogonale ai raggi R^{II} . Tracciare l'ellisse con asse maggiore $5^{II}-6^{II}$ passante per i punti $1^{II}-2^{II}-3^{II}-4^{II}$, separatrice d'ombra propria della sfera sul PV. Individuare $7^{II}-8^{II}$ asse dell'ellisse, ortogonale a $5^{II}-6^{II}$. Evidenziare la parte della sfera in condizione d'ombra propria sul PV. Proiettare i punti 5^{II} e 6^{II} sul PO. Tracciare 5^I-6^I sul PO. Proiettare i punti 7^{II} e 8^{II} sul PO. Tracciare 7^I-8^I sul PO.

2 – Determinazione dell'ombra portata

Utilizzando le direzioni R^I e R^{II} determinare l'ombra dei punti: 1 sul PO; 2 sull'estensione del PO; 3 sul PO; 4 sul PO. Tracciare l'ellisse con assi 1-3 e 2-4 la cui porzione sul PO rappresenta l'ombra portata della sfera su tale piano. Utilizzando le direzioni R^I e R^{II} determinare l'ombra dei punti: 5 sull'estensione del PV; 6 sull'estensione del PV; 7 sull'estensione del PV; 8 sul PV. Tracciare l'ellisse con assi 7-8 e 5-6 la cui porzione sul PV rappresenta l'ombra portata della sfera su tale piano. Le due ellissi si intersecano sulla LT nei punti 9 e 10 che di fatto separano l'ombra della sfera sul PO con quella sul PV. Evidenziare la parte di ombra portata sul PO. Evidenziare la parte di ombra portata sul PV.

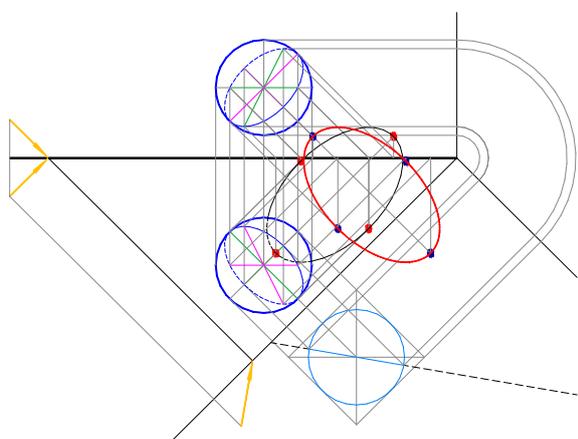


Determiniamo le ombre propria e portata di una sfera generate da un raggio di luce proveniente da fonte impropria e inclinato rispetto a entrambi i piani di proiezione. Dato il parallelismo dei raggi di luce, la separatrice d'ombra propria sarà data dall'intersezione di un piano ortogonale alla direzione dei raggi con la sfera, passante per il suo centro. A tal fine si rappresenti la sfera sul piano ortogonale al piano orizzontale passante per il raggio di luce. Dopo averlo ribaltato il raggio di luce sul piano orizzontale, rispetto alla sua prima traccia, riportiamo ortogonalmente alla direzione dei raggi di luce la separatrice d'ombra propria passante per il centro della proiezione della sfera.

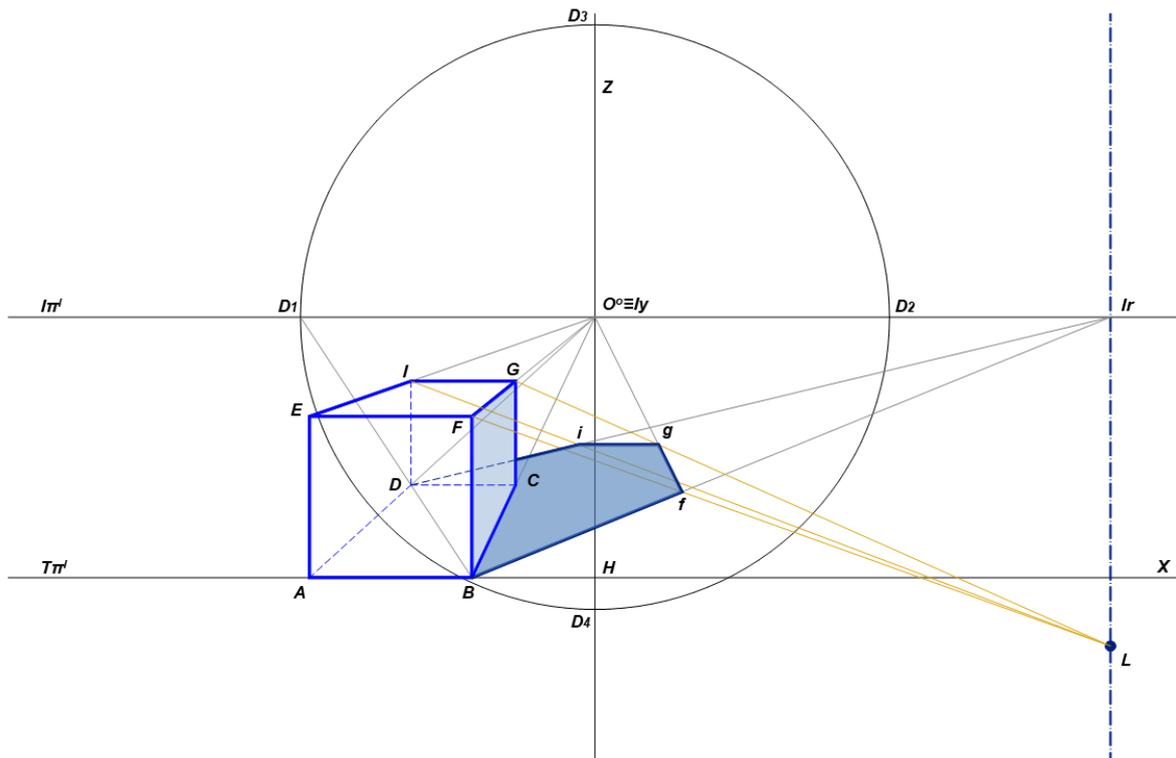


La direzione dei raggi ortogonali al diametro passante per il centro della sfera ci permette di individuare gli assi dell'ellisse che rappresenta l'immagine della separatrice d'ombra propria sui piani orizzontale e verticale. Gli assi dell'ellisse-separatrice individuano otto punti che ci permettono una più precisa determinazione del contorno sui due piani.

Dalla proiezione degli assi della separatrice sui piani orizzontale e verticale si ricava il contorno dell'ombra portata sui piani principali e sulla loro estensione. L'ombra portata, intersezione del cilindro di luce avente la circonferenza pari a quella della sfera, interseca i piani di proiezione determinando due ellissi i cui contorni si incontrano in due punti della linea di terra. Il contorno delle due ombre si proietta virtualmente sull'estensione del piano d'appartenenza. L'ombra portata complessiva sarà data dall'unione delle due parti di ombra reali rappresentate sui piani orizzontale e verticale separate dalla linea di terra.



La percezione del mondo esterno avviene attraverso l'attività sensoriale della vista che si manifesta attraverso la luce e l'ombra, suo elemento complementare. Luce e ombra sono facce opposte della stessa medaglia e consentono una migliore percezione dei volumi, con le infinite sfumature che conferiscono alla rappresentazione una maggiore verosimiglianza, immergendole in un'atmosfera reale. Se con il disegno lineare determiniamo la corrispondenza formale e dimensionale degli oggetti e del contesto spaziale, con l'aggiunta delle ombre, proprie e portate, definiamo i valori tonali delle superfici attraverso le campiture di colore.



Ombra propria e portata di un cubo appoggiato al geometrico in prospettiva a quadro frontale

1 – Impostazione della prospettiva

Tracciare la $I\pi^l$ (linea d'orizzonte) e la $T\pi^l$ (linea delle tracce) parallela alla $I\pi^l$. Tracciare il piano meridiano principale individuando H su $T\pi^l$ e $O^\circ \equiv Iy$ su $I\pi^l$. Tracciare la circonferenza di centro O° e individuare D_1, D_2 su $I\pi^l$ e D_3, D_4 sul piano meridiano principale.

2 – Proiezione della faccia del cubo coincidente col quadro

Individuare sulla linea delle tracce AB, misura oggettiva del lato del cubo. Successivamente tracciare: AE-EF-FB

3 – Le direzioni X, Y e Z

Unire con la fuga Iy i punti: A-B-F-E. Tracciare il raggio D_1B e determinare D su Aly . Tracciare il raggio X passante per D e determinare C su Aly . Tracciare il raggio Z passante per C e determinare G su Fly . Tracciare il raggio X passante per G e determinare I su Ely . Unire ID e completare unendo IE con direzione Iy .

4 – Rappresentazione

Ripassare con segno a vista il contorno esterno del cubo. Ripassare le parti interne della figura a vista. Ripassare le parti interne nascoste della figura. Fine della proiezione prospettica del cubo.

5 – Impostazione della fuga dei raggi di luce

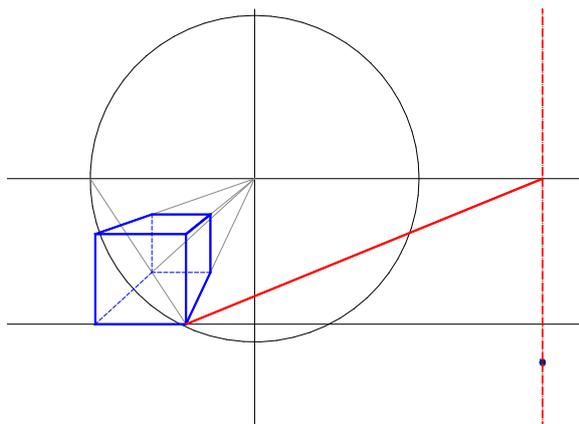
Individuare il punto L, fuga dei raggi di luce. Sulla base della direzione dei raggi luminosi determinare la separatrice d'ombra propria: B-F-G-I-D.

6 – Il piano di luce LZ

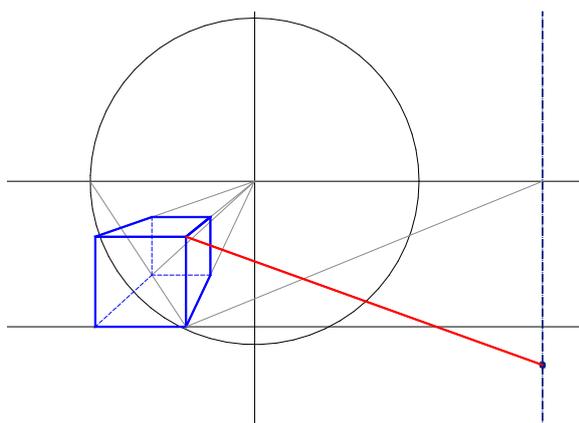
Tracciare la giacitura del piano di luce passante per le direzioni Z individuando sulla $I\pi^l$ il punto I_r direzione dell'ombra delle Z sul geometrico.

7 – L'ombra portata

Unire B con I_r e dopo avere tracciato il raggio di luce FL, individuare su $B I_r$, f ombra del punto F. Unire f con Iy e tracciare il raggio di luce GL individuando su $f Iy$, g ombra del punto G. Tracciare la direzione X passante per g e il raggio di luce L individuando sulla X passante per g, "i" ombra del punto I. Completare tracciando la direzione $D I_r$ passante per i. Definire il contorno a vista dell'ombra portata. Rappresentare la campitura delle parti del cubo in condizione d'ombra propria e l'ombra portata proiettata sul geometrico.

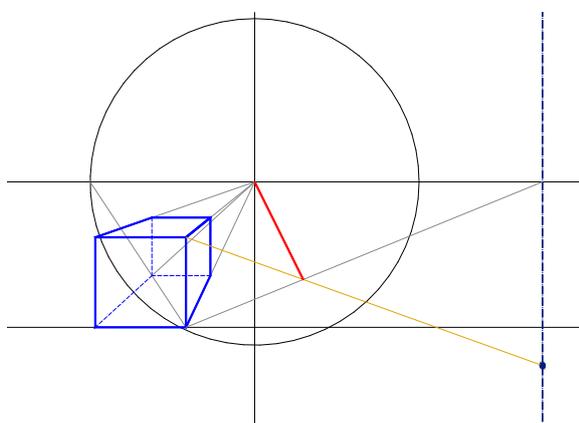


Rappresentiamo un cubo appoggiato al geometrico in prospettiva a quadro frontale, impostando la fonte luminosa naturale posta a distanza infinita e individuando la sua fuga. La fonte di luce si trova alle spalle dell'osservatore alla sua sinistra rispetto al quadro e proietta quindi l'ombra portata del parallelepipedo a destra nella parte opposta rispetto alla sua posizione. Nel sistema prospettico i piani sono individuati dalle giaciture mentre le direzioni sono individuate dalle fughe. Il piano di luce passante per un segmento dato è rappresentato dalla giacitura passante per le fughe della fonte luminosa e del segmento. Possiamo quindi affermare che la direzione dell'ombra portata è data dall'intersezione delle giaciture dei piani di luce e del piano dove l'ombra si concretizza.

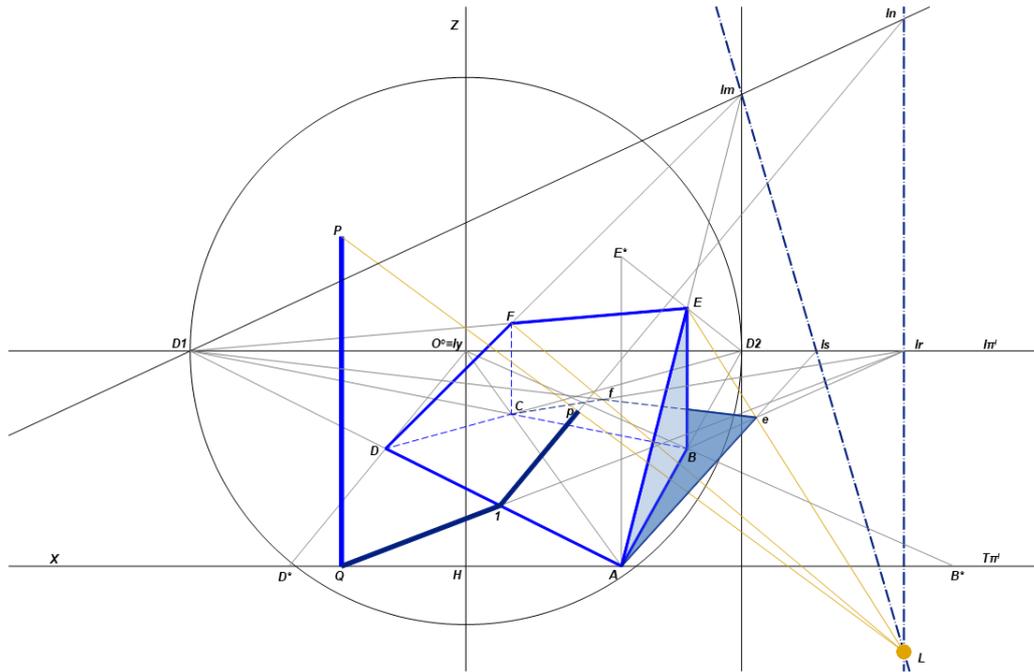


Nei casi, come quello in oggetto, in cui l'ombra portata si proietta completamente sul geometrico le direzioni o fughe, si troveranno sulla giacitura del geometrico (Π') nell'intersezione con i piani di luce passanti per i segmenti dati. L'intersezione del raggio reale, passante per i punti della separatrice con la retta, con il geometrico individua l'ombra portata dei vertici del solido.

Le parti della separatrice parallele al geometrico proiettano ombre la cui direzione si mantiene parallela allo spigolo dato. La direzione della loro ombra coinciderà con la fuga del segmento della separatrice.



L'efficacia della teoria delle ombre nella rappresentazione delle forme, dipende da vari fattori tra i quali acquista una notevole rilevanza la posizione della fonte luminosa rispetto all'oggetto e al contesto in cui esso è inserito. Tra le possibili posizioni che la fonte di luce può assumere sono certamente da privilegiare quelle dietro l'osservatore, a destra o a sinistra, che garantiscono l'illuminazione diretta della vista frontale, in modo da favorire nella simultanea presenza di parti illuminate, in condizione di ombra propria, portata e autoportata, una maggiore espressività dell'immagine data dall'accentuazione del contrasto cromatico, delle campiture.



Ombra portata, su un piano inclinato, di un segmento verticale in prospettiva a quadro verticale.

1 – Proiezione della base ABCD sul geometrale

Impostare, in vera forma e grandezza, la base quadrata ABCD con i lati inclinati di 45° rispetto al quadro. Proiettare il raggio Y passante per A posto sulla linea delle tracce $T\pi^1$. Riportare AB^* sulla $T\pi^1$. Tracciare il raggio $ly-B^*$. Riportare AD^* sulla $T\pi^1$. Tracciare il raggio $ly-D^*$. Tracciare la retta A-D2 e individuare il punto B nell'intersezione con $ly-B^*$. Tracciare la retta B-D1 e individuare il punto C nell'intersezione con $ly-A$. Tracciare la retta A-D1 e individuare il punto D nell'intersezione con $ly-D^*$. Tracciare la retta D-D2 passante per C.

2 – Proiezione del solido

Impostare AE^* , altezza del solido. Tracciare E^*-D2 . Individuare E nell'intersezione fra il raggio Z passante per B e E^*-D2 . Tracciare $E-D1$. Individuare F nell'intersezione fra il raggio Z passante per C e $E-D1$. Tracciare la giacitura Z passante per D2. Individuare la fuga Im della retta passante per AE. Tracciare $Im-D$ passante per F. Ripassare il contorno esterno del solido con segno di linea continua a vista. Ripassare lo spigolo AE con segno di linea continua a vista. Ripassare le parti interne nascoste del solido con segno di linea tratteggiata.

3 – Tracciamento e determinazione dell'ombra portata del segmento PQ

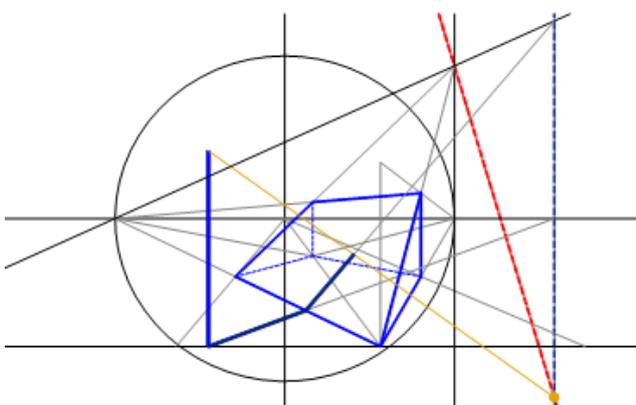
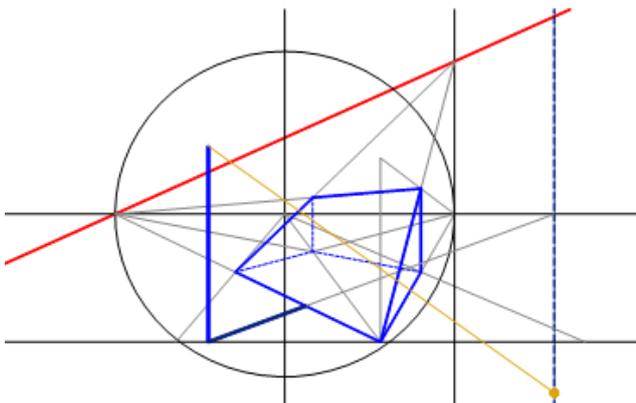
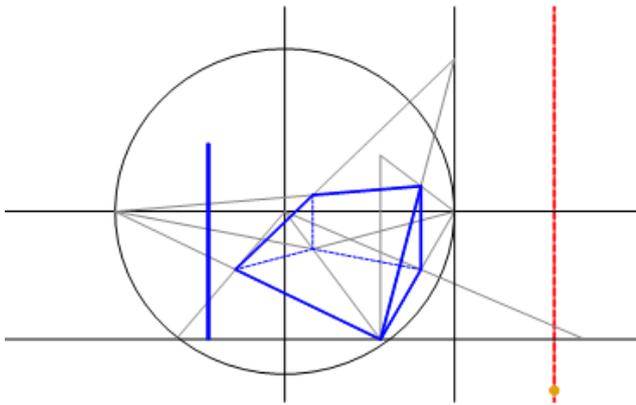
Tracciare sul quadro il segmento verticale PQ. Impostare L punto di fuga della fonte luminosa. Tracciare la Z passante per L, giacitura del piano di luce verticale, e individuare Ir , fuga dell'ombra portata delle direzioni Z sul geometrale. Tracciare la direzione dell'ombra $Q-Ir$ e individuare 1 nell'intersezione con AD. Ripassare $Q1$, ombra portata di QP sul geometrale. Proiettare il raggio di luce passante per P. Tracciare la retta passante per $D1-Im$, giacitura del piano inclinato AEFD, e individuare In sul piano di luce L-Ir. Unire 1-In e determinare p nell'intersezione con il raggio di luce passante per P. Ripassare $1p$, ombra portata di PQ sul piano inclinato AEFD.

4 – Determinazione dell'ombra portata del solido

Tracciare la retta $Im-L$, giacitura del piano di luce passante per AE, e individuare Is sulla $T\pi^1$. Unire A-Is. Tracciare il raggio di luce passante per E; Determinare l'ombra nell'intersezione con A-Is. Verifica dell'allineamento dei punti. B – e – Ir Tracciare $D1-e$. Tracciare il raggio di luce passante per F; Determinare l'ombra nell'intersezione con $D1-e$. Verifica dell'allineamento dei punti C – f – Ir .

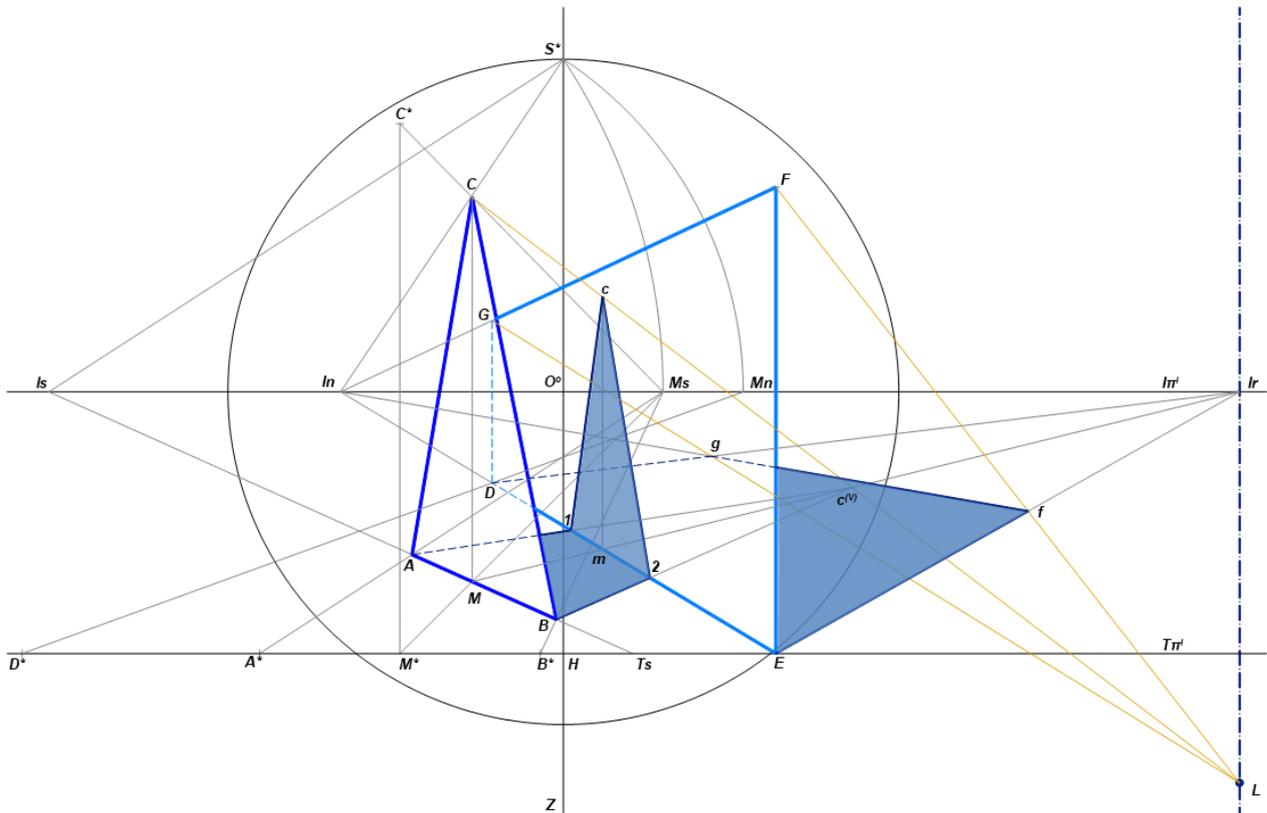
5 – Completamento grafico

Completare con la campitura del triangolo ABE in condizione di ombra propria e con la campitura dell'ombra portata a vista del solido sul geometrale.



Dopo aver rappresentato il solido con il piano inclinato in prospettiva d'angolo con le fughe orizzontali nei punti D1 e D2, intersezione del cerchio delle distanze con la giacitura del geometrale $l\pi^l$, rappresentiamo un segmento verticale PQ coincidente con il quadro e l'estremo Q giacente sulla linea di terra $l\pi l$. Impostata la posizione della fonte di luce naturale a distanza infinita rispetto al quadro tracciamo la giacitura del piano di luce passante per il segmento PQ. Tale giacitura sarà rappresentata da una retta passante per due punti: la fuga della fonte luminosa e la "fuga" del segmento PQ che data la condizione di parallelismo con il quadro si trova a distanza infinita ovvero mantiene costante la direzione delle Z. Tracciata la retta verticale giacitura del piano di luce passante per PQ si determina, nell'intersezione con $l\pi l$, la fuga delle ombre portate delle rette verticali, Z, sul geometrale.

Dal punto Q l'ombra portata del segmento PQ avrà sul geometrale la direzione $Q > l\pi$, fino all'intersezione con il piano inclinato, dove necessariamente cambierà direzione. Sappiamo in linea del tutto generale che l'ombra di un segmento è data dall'intersezione di due piani; il piano di luce e il piano dove si concretizza l'ombra. Questi due piani esemplificati dalle rispettive giaciture si intersecano in un punto che rappresenta la fuga dell'ombra portata. Essendo in precedenza determinata la giacitura del piano di luce non resta che definire la giacitura del piano inclinato dato dalla retta passante per due fughe appartenenti al piano. Prolungando la retta d'appartenenza dei due lati opposti costituenti il perimetro del rettangolo inclinato, individuiamo i punti di fuga D1 e Im. La retta passante per detti punti rappresenta la giacitura del piano inclinato. L'intersezione della giacitura del piano inclinato con la giacitura, in precedenza determinata, del piano di luce passante per PQ determina nell'intersezione la fuga dell'ombra portata di PQ sul piano inclinato. L'ombra del punto P sarà data dall'intersezione della direzione dell'ombra portata di PQ sul piano inclinato e il raggio reale passante per P. Per concludere lo spigolo del piano inclinato, parte della separatrice d'ombra propria, proietterà la sua ombra portata sul geometrale. La fuga (direzione) dell'ombra portata sarà data dall'intersezione della giacitura passante per la fonte di luce e per la fuga dello spigolo inclinato, con la giacitura $l\pi^l$ del geometrale, piano dove si concretizza l'ombra.



Ombra sul geometrale e su un piano ortogonale, di un triangolo in posizione verticale, genericamente inclinato rispetto al quadro, in prospettiva a quadro verticale

1 – Proiezione prospettica del triangolo ABC

Riportare A^*B^* sulla $T\pi^1$ misura oggettiva della base AB. Da M^* , punto medio di A^*B^* , tracciare l'altezza oggettiva M^*C^* del triangolo. Tracciare la retta di appartenenza di AB, $s(Is-Ts)$. Individuare S^* intersezione del piano meridiano principale con il cerchio delle distanze e unire con la fuga Is . Riportare sulla $l\pi^1$ la distanza $Is-S^*$ e individuare il punto di misura Ms delle rette s . Tracciare i raggi: A^*-Ms e individuare A; M^*-Ms e individuare M; B^*-Ms e individuare B; C^*-Ms ; Tracciare il raggio verticale passante per M e individuare C nell'intersezione con C^*-Ms . Unire i punti del triangolo ABC.

2 – Proiezione prospettica del piano verticale DEFG

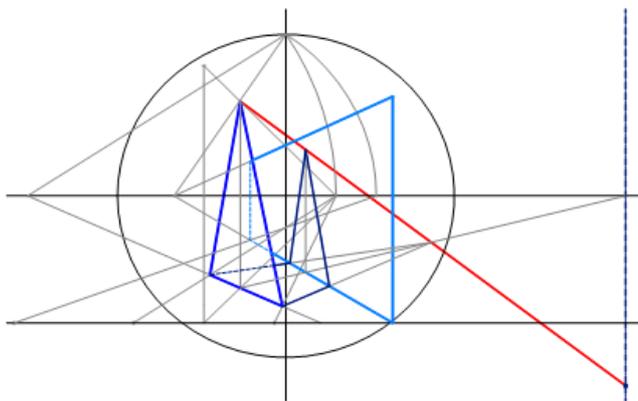
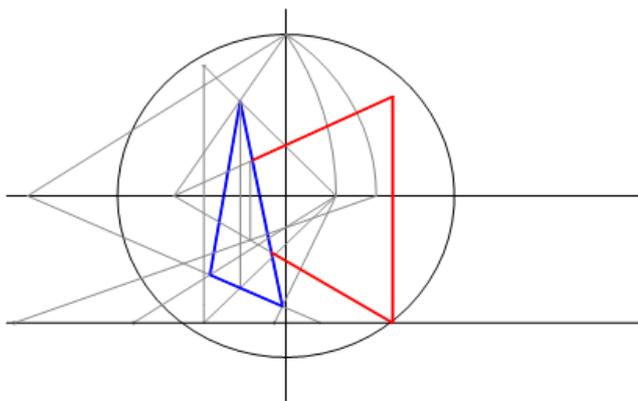
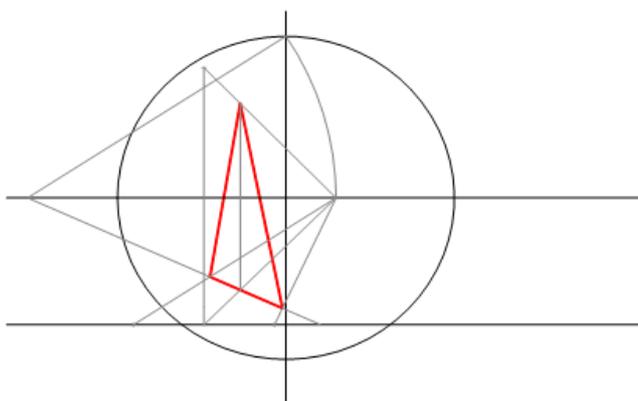
Tracciare sul geometrale la retta n con fuga In e traccia nel punto E. Determinare il punto di misura Mn sulla linea d'orizzonte $l\pi^1$. Riportare la misura oggettiva ED^* sulla linea delle tracce. Tracciare il raggio D^*-Mn e individuare D sulla retta $In-E$. Rappresentare EF, sulla verticale passante per E coincidente con il quadro. Tracciare il raggio $F-In$. Tracciare il raggio verticale passante per D e individuare G sulla retta $In-F$. Ripassare le parti a vista del rettangolo DEFG. Ripassare con segno di linea tratteggiata le parti nascoste del rettangolo DEFG.

3 – Proiezione dell'ombra portata del triangolo ABC

Posizionare la fuga della fonte luminosa L. Tracciare, la giacitura del piano di luce con direzione Z e individuare sulla $l\pi^1$, l_r fuga delle direzioni Z sul geometrale. Tracciare il raggio di luce passante per C. Tracciare il raggio $M-l_r$ e individuare m su DE e $c^{(V)}$ sul raggio CL. Tracciare il raggio Z passante per m e individuare l'ombra portata c su DEFG. Unire A con $c^{(V)}$ e determinare 1 nell'intersezione con DE. Unire 1-c. Unire B con $c^{(V)}$ e determinare 2 nell'intersezione con DE. Unire 2-c. Completamento del contorno dell'ombra portata del triangolo ABC.

4 – Proiezione e campitura dell'ombra portata del rettangolo DEFG

Tracciare il raggio di luce FL. Tracciare il raggio $E-l_r$ e individuare nell'intersezione con FL l'ombra portata f. Tracciare l'ombra della retta d'appartenenza di FG unendo $f-In$. Tracciare il raggio di luce GL e determinare nell'intersezione con $f-In$ l'ombra portata g. Il raggio $D-l_r$ individua sul raggio GL l'ombra g determinata in precedenza. Completamento del contorno dell'ombra portata del rettangolo DEFG. Campitura dell'ombra portata del triangolo e del rettangolo verticale DEFG sul geometrale.

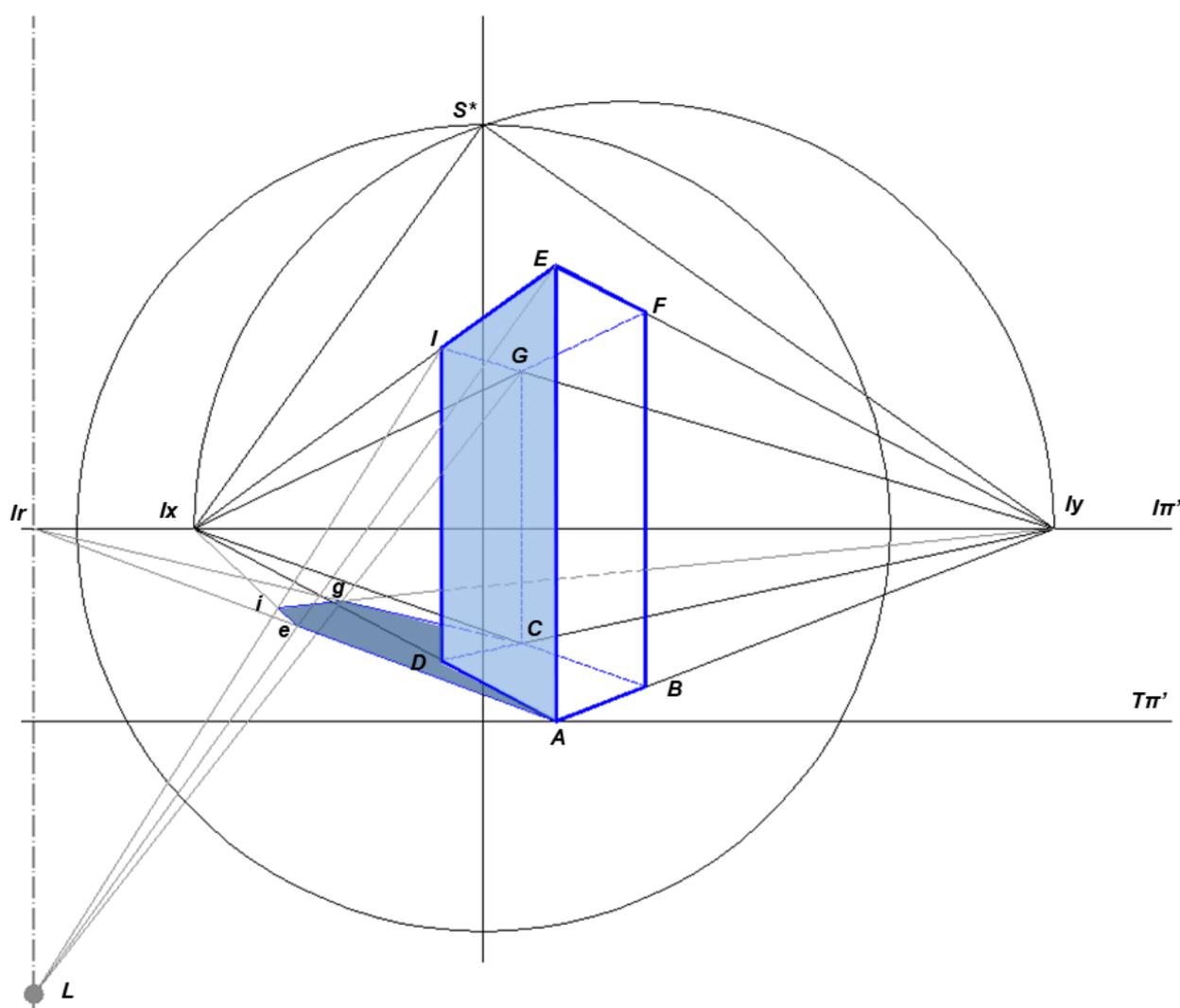


Impostiamo la posizione della fonte luminosa e determiniamo l'ombra portata di un triangolo isoscele verticale e inclinato rispetto al quadro. L'ombra si proietta in parte sul geometrale e in parte sul rettangolo DEFG posto in posizione verticale e anch'esso inclinato rispetto al quadro. Per rappresentare il triangolo sarà opportuno determinare la fuga del lato di base e una volta individuato il corrispondente punto di misura, procediamo partendo dalle misure oggettive sulla linea delle tracce. Dalla intersezione sulla linea delle tracce della retta d'appartenenza della base dopo aver tracciato la verticale sul quadro si potrà misurare oggettivamente l'altezza del triangolo. Determiniamo il vertice C del triangolo nel raggio Z passante per M punto medio della base. Una volta rappresentato il triangolo ABC disegniamo, con le stesse modalità operative il rettangolo DEFG.

La determinazione dell'ombra portata si risolve partendo da alcune considerazioni relative alla particolare posizione del triangolo. Infatti poiché la base del triangolo si trova sul geometrale, l'ombra portata di AB coinciderà con la sua proiezione. Resta quindi da definire unicamente l'ombra portata del vertice C e in seguito unire con i vertici A e B.

Analogamente a quanto visto in precedenti esercizi, determiniamo la giacitura del piano di luce verticale, ovvero la retta passante per la fonte di luce L avente direzione Z e individuiamo l_r nell'intersezione con la giacitura del geometrale l_r^1 . Traceremo a questo punto la retta Ml_r dove M, punto medio della base AB, coincide con la proiezione sul geometrale del vertice C.

Tracciamo il raggio di luce passante per il vertice C e determiniamo, nell'intersezione con Ml_r , l'ombra portata $c^{(V)}$ sul geometrale. Unendo $c^{(V)}$ con i vertici A e B della base otteniamo il contorno dell'ombra portata sul geometrale che si interrompe nei punti 1 e 2 sulla base DE del rettangolo verticale. L'ombra portata si interrompe e si sviluppa completandosi sul piano verticale. Dobbiamo quindi determinare l'ombra c sul rettangolo DEFG tracciando la verticale passante per m intersezione di Ml_r su DE fino all'intersezione con il raggio di luce passante per C. Completiamo il contorno dell'ombra portata sul rettangolo verticale unendo i punti 1 e 2 con l'ombra c, e concludiamo procedendo alla campitura delle parti delimitate dal contorno dell'ombra portata.



Ombra propria e portata di un parallelepipedo appoggiato al geometrico in prospettiva a quadro verticale accidentale

1 – Impostazione della fuga dei raggi di luce

Dopo aver rappresentato il parallelepipedo in prospettiva a quadro verticale accidentale, metodo dei punti di misura, individuare il punto L, fuga dei raggi di luce.

2 - La separatrice d'ombra propria

Sulla base della direzione dei raggi luminosi determinare la separatrice d'ombra propria: A-E-I-G-C.

3 – Il piano di luce LZ

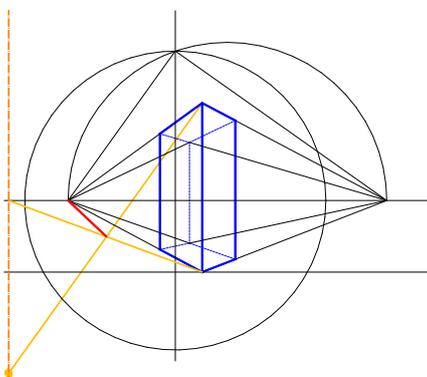
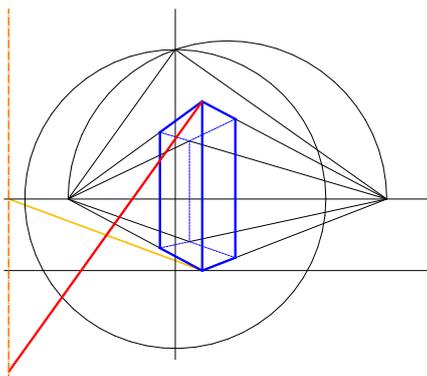
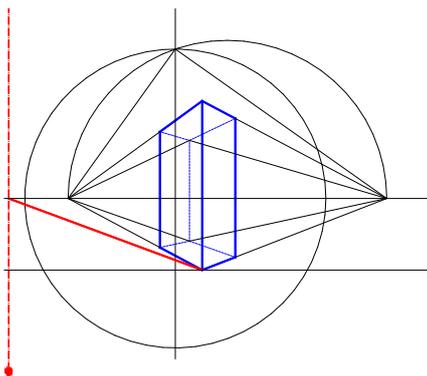
Tracciare la giacitura del piano di luce passante per le direzioni Z. individuando sulla XY il punto Ir.

4 – L'ombra portata

Unire A con Ir. Tracciare il raggio reale passante per E e determinare la sua ombra nell'intersezione e con Alr. Unire e con Ix. Tracciare il raggio passante per I e determinare la sua ombra nell'intersezione i con elx. Unire i con Iy. Tracciare il raggio passante per G e determinare la sua ombra g nell'intersezione ily. IrC passa per il punto g.

5 – La campitura

Determinare ed eseguire la campitura dell'ombra propria (A-E-I-D). Eseguire la campitura dell'ombra portata.



Dopo avere rappresentato un parallelepipedo in prospettiva a quadro verticale accidentale, appoggiato al geometrale, impostiamo la fonte luminosa naturale, individuando la sua fuga. La fonte di luce si trova alle spalle dell'osservatore alla sua destra rispetto al quadro e proietta quindi l'ombra portata del parallelepipedo nella parte opposta. Così come individuato nel sistema prospettico a quadro frontale, la direzione dell'ombra portata è data dall'intersezione delle giaciture dei piani di luce e del piano dove l'ombra si concretizza.

L'ombra portata si proietta completamente sul geometrale e le direzioni o fughe, si troveranno sulla giacitura del geometrale (π') nell'intersezione con i piani di luce passanti per i segmenti dati. Le ombre portate sono determinate dall'intersezione del raggio reale passante per i punti della separatrice con il geometrale. Le parti della separatrice parallele al geometrale proiettano ombre la cui direzione sarà parallela al segmento dato. La direzione della loro ombra coinciderà con la fuga del segmento della separatrice.

Nella determinazione dell'ombra portata dopo aver definito l'oggetto generatore dell'ombra, il contesto dove si concretizza, geometrale e/o altre superfici, e la posizione della fonte luminosa L, naturale a distanza infinita oppure artificiale a distanza finita e quantificabile, il passaggio successivo sarà, come noto, definire la spezzata che separa le parti in ombra propria, ovvero non toccate direttamente dai raggi luminosi, da quelle direttamente toccate e di conseguenza illuminate. Abbastanza intuitivamente in una figura piana inserita nello spazio tridimensionale, a meno di condizioni proiettive particolari, come la luce radente con i raggi di luce paralleli alla figura piana, le due facce saranno una illuminata e l'altra in condizione d'ombra propria così che la separatrice d'ombra propria coinciderà con il contorno della figura. Sarà quindi sufficiente proiettare i vertici della figura dal punto di luce per ottenere il contorno dell'ombra portata. È proprio l'interposizione della figura fra la fonte luminosa e la superficie illuminata a generare, per mezzo del noto metodo della proiezione e sezione, il contorno dell'ombra portata. Possiamo quindi affermare che l'ombra portata può essere definita come l'immagine della figura proiettata, nei vari piani, dalla posizione del punto di luce.